VARIEDADES DIFERENCIABLES
Convocatoria extraordinaria. Septiembre de 2020.
Examen resuelto

1. **[2 puntos]** Sea $\widehat{M} \subset M$ una subvariedad regular de M y $\phi : N \to M$ una aplicación diferenciable. Demostrar que la aplicación inducida $\widehat{\phi} : N \to \widehat{M}$ es diferenciable. ¿Puede eliminarse la hipótesis de regularidad?

   Solución: Sea $q \in N$ y $\left\{x^1, \ldots, x^n\right\}$ un sistema coordenado en M. Como $\phi : N \to M$ es diferenciable y $\widehat{M}$ tiene la topología inducida, la restricción $\widehat{\phi} = \phi|_{\widehat{M}}$ es continua. Sea $j : \widehat{M} \to M$ la aplicación natural de inclusión. Para cada índice se tiene

   $$x^i\ \widehat{\phi} = x^i\ j\ \widehat{\phi} = x^i\ \phi,$$

   de lo que resulta que $\widehat{\phi}$ es diferenciable.
   La afirmación no tiene por qué ser cierta si la subvariedad no es regular.

2. **[2 puntos]** En $\mathbb{R}^2$ se considera el campo tensorial

   $$J = \cosh x \frac{\partial}{\partial x} \otimes \mathrm{d}y + \frac{1}{\cosh x} \frac{\partial}{\partial y} \otimes \mathrm{d}x$$

   Justificar que la familia $\mathcal{D}$ definida por la condición

   $$\mathcal{D} = \left\{\mathbf{X} \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^2\right)\ \mid J(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\right\}$$

   define una distribución de orden uno en $\mathbb{R}^2$, y determinar las curvas integrales del mismo. Hallar las condiciones que ha de cumplir una 1-forma $\omega = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$ para que se satisfagan las relaciones

   $$\omega(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathrm{d}\omega = 0.$$

   Indicación: No es necesario integrar la ecuación diferencial en derivadas parciales que aparece.]

   Solución: Es inmediato comprobar que $J(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ para $\mathbf{X} = X^1 \dfrac{\partial}{\partial x} + X^2 \dfrac{\partial}{\partial y}$ implica $X^1 = \cosh(x) X^2$. Siendo las componentes diferenciables, $\mathbf{X}$ define un campo en $\mathbb{R}^2$. Las curvas integrales se obtienen del sistema $\dot{x} = \cosh(x) X^2, \quad \dot{y} = X^2$ por tanto se verifica $\dot{x} = \cosh(x)\dot{y}$ y se obtiene la ecuación separable

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\cosh(x)} = \mathrm{d}y$$

con integral primera $y = 2\arctan(\mathrm{e}^x) + C$. Si $\omega(\mathbf{X}) = 0$, entonces $A\cosh(x) + B = 0$ y en consecuencia $\omega = A\mathrm{d}x - A\cosh(x)\mathrm{d}y$. De $\mathrm{d}\omega = 0$ se deduce la EDP

$$\frac{\partial A}{\partial x}\cosh(x) + \frac{\partial A}{\partial y} + A\sinh(x) = 0$$

con solución general $A(x,y) = \cosh(x)^{-1}\Psi\left(y - 2\arctan(\mathrm{e}^x)\right)$.

3. **[2 puntos]** Sea Id_N la matriz identidad en $\mathbb{C}^N$ y J la matriz definida por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_N \\ \mathrm{Id}_N & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea M la variedad diferenciable determinada por la condición

$$M = \left\{ A \in \mathrm{GL}(2N,\mathbb{C}) \mid JA^*J^{-1}A^{-1} = \mathrm{Id_{2N}}, \quad \mathrm{det(A) = 1} \right\},$$

siendo A^* la conjugada compleja. Determinar el espacio tangente a M en $p = \mathrm{Id}_{2N}$ y deducir que $\dim M = N^2 - 1$.

Observación: No hay que demostrar que M sea una variedad.

Solución: Sea $A(s)$ una curva en M con $A(0) = \mathrm{Id}$ la matriz identidad. Entonces $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(JA^*) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(AJ)$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(A) = 0$ y por tanto

$$J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A^*) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A)\,J, \quad \mathrm{Tr}A = 0.$$

Puest que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A^*) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A)^*$, llamando B la derivada de A, el espacio tangente está generado por las matrices B de traza nula con $JB^* - BJ = 0$. Es trivial comprobar que $\dim M = N^2 - 1$.

4. **[4.0 puntos]** En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma diferencial

$$\omega = (1 - yz)\,\mathrm{d}x - x(z + x)\mathrm{d}y + (1 + xy)\mathrm{d}z.$$

   (a) Determinar el rango de ω en cada punto de $\mathbb{R}^3$ y justificar que el conjunto de puntos en los cuales el rango es cero determinan una subvariedad regular M de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Encontrar un campo de vectores $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ del tipo

$$\mathbf{Y} = P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

   con P, Q polinomios y tal que $\omega(\mathbf{Y}) = 0$. Justificar que las trayectorias integrales de $\mathbf{Y}$ por el punto $(0,1,0)$ son rectas contenidas en el plano $y = 1$.

(c) Sea $u = \dfrac{zy-1}{xy+1}$, donde $xy+1 \neq 0$. Demostrar que se verifican las relaciones

$$\mathrm{d}y(\mathbf{Y}) = 0, \qquad \mathrm{d}u(\mathbf{Y}) = 0$$

y determinar la expresión de ω respecto de las coordenadas x, y, u.

(d) Demostrar que ω puede expresarse como

$$\omega = (1+xy)(z+x)\left[\frac{\mathrm{d}u}{1+u} - \frac{\mathrm{d}y}{y}\right]$$

y deducir que para $(1+xy)(z+x) \neq 0$, existen funciones no nulas f, g con $\omega = f\mathrm{d}g$. Concluir que las soluciones de la ecuación $\omega = 0$ están determinadas por las superficies $(1+xy) - \lambda(z+x) = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución: Como $x \neq 0$, el rango de ω es uno en todos los puntos salvo los de la curva

$$\gamma(x) = \left(x, -\frac{1}{x}, -x\right)$$

determinada por las ecuaciones $z+x=0, \quad yz-1=0$. La curva γ es claramente una subvariedad regular. Se puede justificar asimismo viendo que $F(x,y,z) = (z+x, yz-1)$ tiene una diferencial de rango dos por ser $x \neq 0$, y por tanto $F^{-1}(0,0)$ es regular. Sea $\mathbf{X} = P\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial z}$. Entonces $\omega(\mathbf{X}) = P(1-yz) + Q(1+xy) = 0$. Tomando $P = 1+xy$, $Q = yz-1$ se obtiene un campo del tipo pedido. Las curvas integrales por (x_0, y_0, z_0) con $y_0 \neq 0$ son

$$\sigma(s) = \left(\frac{1+x_0y_0}{y_0}\mathrm{e}^{ty_0}, y_0, \frac{(y_0z_0-1)\mathrm{e}^{ty_0}+1}{y_0}\right)$$

que son rectas para $y = y_0$.
Se obtiene

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{1+xy)^2}\left(y(xy+1)\mathrm{d}z + (z+x)\mathrm{d}y + (1-zy)y\mathrm{d}x\right)$$

y claramente $\mathrm{d}u(\mathbf{Y}) = 0$. Un cálculo elemental muestra que

$$\omega = \frac{(xy+1)^2}{y^2}\left(y\mathrm{d}u - (1+u)\mathrm{d}y\right).$$

Usando que $1+u = \dfrac{(1+xy)^2}{y}$ se sigue que $\omega = (1+xy)(z+x)\left[\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u} - \dfrac{\mathrm{d}y}{y}\right]$, luego las soluciones de $\omega = 0$ con $(1+xy)(z+x) \neq 0$ vienen dadas por las soluciones de

$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u} - \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0.$$

Es evidente que $u+1 = \lambda y$ con λ constante es la superficie buscada.