Variedades Diferenciables

Convocatoria de enero de 2021. Grupo B

Tiempo: 2 horas y media horas

---

1. **[2 puntos]** Si $\{u_1, \ldots, u_p\}$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ con $p \leq n$ y se satisface la relación $u_1 \wedge v_1 + u_2 \wedge v_2 + \cdots + u_p \wedge v_p = 0$ para una cierta familia de vectores $\{v_1, \ldots, v_p\}$, demostrar que existen coeficientes simétricos $a_i^j = a_j^i$ tales que para cada i se verifica
$$v_i = a_i^j u_j.$$

2. **[2 puntos]** Sea $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ un grupo de (Lie de) matrices y sean $L_A(X) = AX$ y $R_A(X) = XA$ las traslaciones a la izquierda y la derecha, respectivamente. Si $\Psi : G \to G$ está definida por $\Psi(X) = X^{-1}$, demostrar que una 1-forma $\omega \in \Omega^1(G)$ es invariante por traslaciones a la izquierda si y sólo si $\Psi^*\omega$ es invariante por traslaciones a la derecha.

3. **[2 puntos]** Sea V un espacio vectorial de dimensión n y la variedad $M = End(V)$. Se define $\mathcal{A} = \{\psi \in M \mid \det(\mathrm{Id} + \psi) \neq 0\}$. Demostrar que la aplicación $F : \mathcal{A} \to M$ definida por
$$F(\psi) = (\mathrm{Id} - \psi)\,(\mathrm{Id} + \psi)^{-1}$$
es diferenciable y satisface $F^2 = \mathrm{Id}$. Deducir que F es un difeomorfismo de $\mathcal{A}$.

4. **[4.0 puntos]** En $\mathbb{R}^4$ con coordenadas x, y, z, t se considera el sistema dado por las formas diferenciales
$$\omega^1 = (z - x^2)\,dx + xy\,dy + dz, \quad \omega^2 = f(x, y, z, t)\,dx + g(x, y, z, t)\,dy,$$
siendo f, g funciones diferenciables.
   (a) Determinar condiciones sobre f, g para que el ideal $\mathcal{I}$ generado por ω^1, ω^2 sea diferencial.
   (b) Justificar que para $(f, g) = (1, 1)$, la forma
   $$\theta = \exp(x)\left((1 + z - x - xy - x^2)\,dx + (1 - x)\,dy + dz\right)$$
   pertenece a $\mathcal{I}$. Hallar su expresión en términos de ω^1 y ω^2.
   (c) Para $f = g = 1$, se considera en $\mathbb{R}^3$ la distribución dada por
   $$\Delta = \left\{\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \mid \theta(\mathbf{X}) = 0\right\}.$$
   Justificar que Δ es involutiva y determinar campos $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ en Δ tales que
   $$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0.$$
   (d) Hallar coordenadas u, v, w de $\mathbb{R}^3$ de modo que
   $$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial v}.$$