solucionesEJulio2020.pdf

Anónimo

Álgebra

1º Grado en Física

Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid

Examen Final de Álgebra **1 de Julio de 2020**

Problema 1A

Sea $U_1 = \mathrm{Lin}\{(2,1,1,0),(0,1,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ y $U_2 = \mathrm{Lin}\{(2,-1,1,1),(0,-1,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Encuentre las ecuaciones intrínsecas y una base de un subespacio vectorial $U_3 \subset \mathbb{R}^4$ tal que $(U_1 \cap U_2) \oplus U_3 = \mathbb{R}^4$.

Una forma sencilla de calcular la intersección $(U_1 \cap U_2)$ es hallar las ecuaciones intrínsecas de U_1 y U_2:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\,,\, x_4 = 0\}\,, \\ U_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1 + x_2 - x_3 = 0\,,\, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Su intersección es el subespacio de soluciones del sistema obtenido añadiendo las ecuaciones de U_1 a las de U_2:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0\,,\; x_4 = 0\,,\;\; x_1 + x_2 - x_3 = 0\,,\; x_1 - x_3 - x_4 = 0\,,$$

a saber

$$U_1 \cap U_2 = \mathrm{Lin}\{(1,0,1,0)\}\,.$$

Hay infinitos subespacios U_3 cuya suma con $U_1 \cap U_2$ es directa y da lugar al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. La fórmula de Grassmann nos dice que que estos subespacios U_3 son todos tridimensionales. Así que cualquier conjunto de tres vectores $S \subset \mathbb{R}^4$ que verifique estas dos condiciones

1. $(1,0,1,0) \notin S$ y
2. $S \cup \{(1,0,1,0)\}$ es un conjunto libre,

nos proporciona una solución aceptable, a saber $U_3 = \mathrm{Lin}(S)$. Algunos ejemplos sencillos entre estas infinitas posibilidades son:

$$\begin{aligned} U_3^a &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_3 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}, \\ U_3^b &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(0,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Otra solución en la que es corriente pensar es $U_3^c = (U_1 \cap U_2)^\perp$:

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1 + x_3 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}.$$

Problema 1B

Sea $U_1 = \mathrm{Lin}\{(0,2,1,1),(0,0,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$ y $U_2 = \mathrm{Lin}\{(1,2,-1,1),(1,0,-1,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Encuentre las ecuaciones intrínsecas y una base de un subespacio vectorial $U_3 \subset \mathbb{R}^4$ tal que $(U_1 \cap U_2) \oplus U_3 = \mathbb{R}^4$.

Una forma sencilla de calcular la intersección $(U_1 \cap U_2)$ es hallar las ecuaciones intrínsecas de U_1 y U_2:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \, ; \, x_1 = 0 \, , \, x_2 - x_3 - x_4 = 0\} \, , \\ U_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \, ; \, x_2 + x_3 - x_4 = 0 \, , \, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Su intersección es el subespacio de soluciones del sistema obtenido añadiendo las ecuaciones de U_1 a las de U_2:

$$x_1 = 0 \, , \, x_2 - x_3 - x_4 = 0 \, , \, x_2 + x_3 - x_4 = 0 \, , \, x_1 - x_2 + x_4 = 0$$

a saber

$$U_1 \cap U_2 = \mathrm{Lin}\{(0,1,0,1)\} \, .$$

Hay infinitos subespacios U_3 cuya suma con $U_1 \cap U_2$ es directa y da lugar al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. La fórmula de Grassmann nos dice que que estos subespacios U_3 son todos tridimensionales. Así que cualquier conjunto de tres vectores $S \subset \mathbb{R}^4$ que verifique estas dos condiciones

1. $(1,0,1,0) \notin S$ y
2. $S \cup \{(1,0,1,0)\}$ es un conjunto libre,

nos proporciona una solución aceptable, a saber $U_3 = \mathrm{Lin}(S)$. Algunos ejemplos sencillos entre estas infinitas posibilidades son:

$$\begin{aligned} U_3^a &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \, ; \, x_4 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}, \\ U_3^b &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \, ; \, x_2 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Otra solución en la que es corriente pensar es $U_3^c = (U_1 \cap U_2)^\perp$:

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \, ; \, x_2 + x_4 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(0,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}.$$

Problema 1C

Sea $U_1 = \text{Lin}\{(1,0,2,1),(-1,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ y $U_2 = \text{Lin}\{(1,1,2,-1),(-1,1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Encuentre las ecuaciones intrínsecas y una base de un subespacio vectorial $U_3 \subset \mathbb{R}^4$ tal que $(U_1 \cap U_2) \oplus U_3 = \mathbb{R}^4$.

Una forma sencilla de calcular la intersección $(U_1 \cap U_2)$ es hallar las ecuaciones intrínsecas de U_1 y U_2:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, x_1 - x_3 + x_4 = 0\,,\, x_2 = 0\}\,, \\ U_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, x_1 - x_3 - x_4 = 0\,,\, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Su intersección es el subespacio de soluciones del sistema obtenido añadiendo las ecuaciones de U_1 a las de U_2:

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0\,,\; x_2 = 0\,,\; x_1 - x_3 - x_4 = 0\,,\; x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

a saber

$$U_1 \cap U_2 = \text{Lin}\{(1,0,1,0)\}\,.$$

Hay infinitos subespacios U_3 cuya suma con $U_1 \cap U_2$ es directa y da lugar al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. La fórmula de Grassmann nos dice que que estos subespacios U_3 son todos tridimensionales. Así que cualquier conjunto de tres vectores $S \subset \mathbb{R}^4$ que verifique estas dos condiciones

1. $(1,0,1,0) \notin S$ y
2. $S \cup \{(1,0,1,0)\}$ es un conjunto libre,

nos proporciona una solución aceptable, a saber $U_3 = \text{Lin}(S)$. Algunos ejemplos sencillos entre estas infinitas posibilidades son:

$$\begin{aligned} U_3^a &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, x_3 = 0\} = \text{Lin}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}, \\ U_3^b &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, x_1 = 0\} = \text{Lin}\{(0,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Otra solución en la que es corriente pensar es $U_3^c = (U_1 \cap U_2)^\perp$:

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, x_1 + x_3 = 0\} = \text{Lin}\{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}.$$

Problema 1D

Sea $U_1 = \mathrm{Lin}\{(1,1,0,2),(1,-1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ y $U_2 = \mathrm{Lin}\{(-1,1,1,2),(-1,-1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$. Encuentre las ecuaciones intrínsecas y una base de un subespacio vectorial $U_3 \subset \mathbb{R}^4$ tal que $(U_1 \cap U_2) \oplus U_3 = \mathbb{R}^4$.

Una forma sencilla de calcular la intersección $(U_1 \cap U_2)$ es hallar las ecuaciones intrínsecas de U_1 y U_2:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1 + x_2 - x_4 = 0\,,\, x_3 = 0\}\,, \\ U_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1 - x_2 + x_4 = 0\,,\, x_2 + x_3 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Su intersección es el subespacio de soluciones del sistema obtenido añadiendo las ecuaciones de U_1 a las de U_2:

$$x_1 + x_2 - x_4 = 0\,,\; x_3 = 0\,,\; x_1 - x_2 + x_4 = 0\,,\; x_2 + x_3 - x_4 = 0\,,$$

a saber

$$U_1 \cap U_2 = \mathrm{Lin}\{(0,1,0,1)\}\,.$$

Hay infinitos subespacios U_3 cuya suma con $U_1 \cap U_2$ es directa y da lugar al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. La fórmula de Grassmann nos dice que que estos subespacios U_3 son todos tridimensionales. Así que cualquier conjunto de tres vectores $S \subset \mathbb{R}^4$ que verifique estas dos condiciones

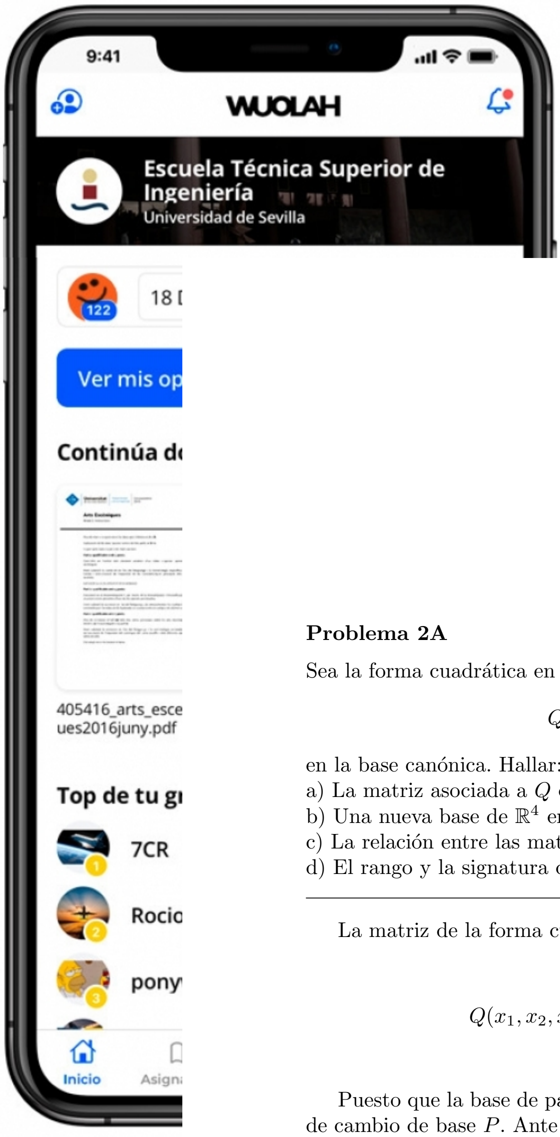
1. $(1,0,1,0) \notin S$ y
2. $S \cup \{(1,0,1,0)\}$ es un conjunto libre,

nos proporciona una solución aceptable, a saber $U_3 = \mathrm{Lin}(S)$. Algunos ejemplos sencillos entre estas infinitas posibilidades son:

$$\begin{aligned} U_3^a &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_4 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}, \\ U_3^b &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_2 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Otra solución en la que es corriente pensar es $U_3^c = (U_1 \cap U_2)^\perp$:

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_2 + x_4 = 0\} = \mathrm{Lin}\{(0,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}.$$



Problema 2A

Sea la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 8x_1x_2 + 16x_2x_3 \,,$$

en la base canónica. Hallar:
a) La matriz asociada a Q en la base canónica.
b) Una nueva base de $\mathbb{R}^4$ en la que Q se reduzca a suma o resta de cuadrados.
c) La relación entre las matrices de Q en la base canónica y la base nueva.
d) El rango y la signatura de Q.

La matriz de la forma cuadrática, $\tilde{Q}$, es $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)$ en términos de la matriz de la forma $\hat{Q}$ como

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3,x_4)\tilde{Q}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la base de partida es la base canónica, la base nueva está formada por las columnas de la matriz de cambio de base P. Ante este cambio de base, $\tilde{Q}$ se transforma por congruencia $\tilde{Q} \to P^T\tilde{Q}P$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \quad Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = (z_1,z_2,z_3,z_4)P^T\tilde{Q}P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

En este caso, la forma canónica resulta ser:

$$P^T\tilde{Q}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 \,.$$

Por tanto, el rango de Q es 4, su signatura es 2, y sus índices de inercia son $(3,1)$.

Hay infinitos cambios de base que llevan la forma cuadrática a su forma canónica. Una forma particularmente sencilla de alcanzarla es completar cuadrados. Por ejemplo, si completamos los cuadrados en el orden natural (primero x_1 y luego x_2) obtenemos

$$Q(x_1,x_2,x_3,x4) = [x_1 \;-\; 4x_2]^2 + \left[\sqrt{\frac{77}{13}}\,x_3\right]^2 + \left[\sqrt{2}\,x_4\right]^2 - \left[\sqrt{13}\,x_2 \;-\; \frac{8}{\sqrt{13}}\,x_3\right]^2, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{32}{13}\sqrt{\frac{13}{77}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{8}{13}\sqrt{\frac{13}{77}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & \sqrt{\frac{13}{77}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, si completamos primero el cuadrado correspondiente a x_1 y a continuación el de x_3 obtenemos otra solución correcta

$$Q(x_1,x_2,x_3,x4) = [x_1 \;-\; 4x_2]^2 + [x_3 \;+\; 8x_2]^2 + \left[\sqrt{2}\,x_4\right]^2 - \left[\sqrt{77}\,x_2\right]^2, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{77}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{77}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{\sqrt{77}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por supuesto, cualquier otra matriz de cambio de base P_3 que también alcance la forma canónica nos proporcionará una respuesta igualmente correcta al problema.

Problema 2B

Sea la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 8x_2x_3 + 16x_3x_4 \ ,$$

en la base canónica. Hallar:
a) La matriz asociada a Q en la base canónica.
b) Una nueva base de $\mathbb{R}^4$ en la que Q se reduzca a suma o resta de cuadrados.
c) La relación entre las matrices de Q en la base canónica y la base nueva.
d) El rango y la signatura de Q.

La matriz de la forma cuadrática, $\tilde{Q}$, es $Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ en términos de la matriz de la forma $\hat{Q}$ como

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\tilde{Q}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ , \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} .$$

Puesto que la base de partida es la base canónica, la base nueva está formada por las columnas de la matriz de cambio de base P. Ante este cambio de base, $\tilde{Q}$ se transforma por congruencia $\tilde{Q} \to P^T\tilde{Q}P$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \ , \quad Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)P^T\tilde{Q}P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

En este caso, la forma canónica resulta ser:

$$P^T\tilde{Q}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 \, .$$

Por tanto, el rango de Q es 4, su signatura es 2, y sus índices de inercia son $(3, 1)$.

Hay infinitos cambios de base que llevan la forma cuadrática a su forma canónica. Una forma particularmente sencilla de alcanzarla es completar cuadrados. Si completamos primero el cuadrado correspondiente a x_2, y a continuación el de x_3 obtenemos

$$Q(x_1, x_2, x_3, x4) = \left[\sqrt{2}\,x_1\right]^2 + [x_2 \ - \ 4x_3]^2 + \left[\sqrt{\frac{77}{13}}\,x_4\right]^2 - \left[\sqrt{13}\,x_3 \ - \ \frac{8}{\sqrt{13}}\,x_4\right]^2 \ , \quad P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{32}{13}\sqrt{\frac{13}{77}} & \frac{4}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & \frac{8}{13}\sqrt{\frac{13}{77}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{13}{77}} & 0 \end{pmatrix} .$$

Ahora bien, si completamos primero el cuadrado correspondiente a x_2 y a continuación el de x_4 obtenemos otra solución correcta

$$Q(x_1, x_2, x_3, x4) = \left[\sqrt{2}\,x_1\right]^2 + [x_2 \ - \ 4x_3]^2 + [x_4 \ + \ 8x_3]^2 - \left[\sqrt{77}\,x_3\right]^2 \ , \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{\sqrt{77}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{77}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{\sqrt{77}} \end{pmatrix} .$$

Por supuesto, cualquier otra matriz de cambio de base P_3 que también alcance la forma canónica nos proporciona una respuesta igualmente correcta al problema.

Problema 2C

Sea la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 16x_1x_4 - 8x_3x_4 \ .$$

en la base canónica. Hallar:
a) La matriz asociada a Q en la base canónica.
b) Una nueva base de $\mathbb{R}^4$ en la que Q se reduzca a suma o resta de cuadrados.
c) La relación entre las matrices de Q en la base canónica y la base nueva.
d) El rango y la signatura de Q.

La matriz de la forma cuadrática, $\tilde{Q}$, es $Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ en términos de la matriz de la forma $\hat{Q}$ como

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\tilde{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} , \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 8 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} .$$

Puesto que la base de partida es la base canónica, la base nueva está formada por las columnas de la matriz de cambio de base P. Ante este cambio de base, $\tilde{Q}$ se transforma por congruencia $\tilde{Q} \to P^T\tilde{Q}P$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} , \quad Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)P^T\tilde{Q}P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

En este caso, la forma canónica resulta ser:

$$P^T\tilde{Q}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 \, .$$

Por tanto, el rango de Q es 4, su signatura es 2, y sus índices de inercia son $(3, 1)$.

Hay infinitos cambios de base que llevan la forma cuadrática a su forma canónica. Una forma particularmente sencilla de alcanzarla es completar cuadrados:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x4) = [x_1 \ + \ 8x_4]^2 + \left[\sqrt{2}\, x_2\right]^2 + [x_3 \ - \ 4\, x_4]^2 - \left[\sqrt{77}\, x_4\right]^2 , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-8}{\sqrt{77}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{77}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{77}} \end{pmatrix} .$$

Por supuesto, cualquier otra matriz de cambio de base P_2 que también alcance la forma canónica nos proporcionará una respuesta igualmente correcta al problema.

Problema 2D

Sea la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 - 8x_1x_4 + 16x_3x_4 \ .$$

en la base canónica. Hallar:
a) La matriz asociada a Q en la base canónica.
b) Una nueva base de $\mathbb{R}^4$ en la que Q se reduzca a suma o resta de cuadrados.
c) La relación entre las matrices de Q en la base canónica y la base nueva.
d) El rango y la signatura de Q.

La matriz de la forma cuadrática, $\tilde{Q}$, es $Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ en términos de la matriz de la forma $\hat{Q}$ como

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\tilde{Q}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ , \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ -4 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} .$$

Puesto que la base de partida es la base canónica, la base nueva está formada por las columnas de la matriz de cambio de base P. Ante este cambio de base, $\tilde{Q}$ se transforma por congruencia $\tilde{Q} \to P^T\tilde{Q}P$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \ , \quad Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)P^T\tilde{Q}P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

En este caso, la forma canónica resulta ser:

$$P^T\tilde{Q}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 \, .$$

Por tanto, el rango de Q es 4, su signatura es 2, y sus índices de inercia son $(3, 1)$.

Hay infinitos cambios de base que llevan la forma cuadrática a su forma canónica. Una forma particularmente sencilla de alcanzarla es completar cuadrados:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x4) = [x_1 \ - \ 4x_4]^2 + \left[\sqrt{2}\, x_2\right]^2 + [x_3 \ + \ 8\, x_4]^2 - \left[\sqrt{77}\, x_4\right]^2 \ , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{77}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{\sqrt{77}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{77}} \end{pmatrix} .$$

Por supuesto, cualquier otra matriz de cambio de base P_2 que también alcance la forma canónica nos proporcionará una respuesta igualmente correcta al problema.

Problema 3A

Consideremos el subespacio de $\mathbb{C}^3$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : \ (1-\mathrm{i})x_1 + (1+\mathrm{i})x_2 - (1+\mathrm{i})x_3 = 0\} \,.$$

Se pide:

1. Una base ortonormal de W y $W^\perp$.
2. Hallar la matriz representativa en la base canónica de los proyectores ortogonales sobre W y $W^\perp$.
3. Descomponer el vector $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$ como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$, con $\mathbf{v}_\parallel \in W$ y $\mathbf{v}_\perp \in W^\perp$.

Antes de comenzar, simplifiquemos la ecuación de W dividiendo ambos miembros por $-(1+\mathrm{i})$:

$$\mathrm{i}x_1 - x_2 + x_3 = 0\,,$$

que, como todas las ecuaciones lineales y homogéneas, puede escribirse como una condición de ortogonalidad,

$$\langle(-\mathrm{i}, -1, 1)|(x_1, x_2, x_3)\rangle = \mathrm{i}x_1 - x_2 + x_3 = 0\,.$$

Tras esta observación resulta inmediato proceder:

1. Hay infinitas base ortonormales de W (por el contrario, para $W^\perp$ la elección es única salvo fase). Una posibilidad aceptable es

$$W = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(-\mathrm{i}, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(\mathrm{i}, 1, 2)}{\sqrt{6}}\Big\}, \quad W^\perp = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(-\mathrm{i}, -1, 1)}{\sqrt{3}}\Big\}.$$

2. En la base canónica de $\mathbb{C}^3$, la matriz asociada al proyector ortogonal sobre $W^\perp$ es

$$\Pi_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(\mathrm{i}, -1, 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ \mathrm{i} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El proyector sobre W es

$$\Pi_W = \mathbf{1} - \Pi_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Tenemos

$$\Pi_W \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-2\mathrm{i} \\ 4+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \Pi_{W^\perp}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

que podemos escribir $\mathbf{v}_\parallel = \frac{1}{3}(2-2\mathrm{i}, 4+\mathrm{i}, 2-\mathrm{i})$, $\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{3}(1+2\mathrm{i}, 2-\mathrm{i}, -2+\mathrm{i})$.

Problema 3B

Consideremos el subespacio de $\mathbb{C}^3$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : \ (1+\mathrm{i})x_1 - (1-\mathrm{i})x_2 + (1-\mathrm{i})x_3 = 0\} \ .$$

Se pide:

1. Una base ortonormal de W y $W^\perp$.
2. Hallar la matriz representativa en la base canónica de los proyectores ortogonales sobre W y $W^\perp$.
3. Descomponer el vector $\mathbf{v} = (\mathrm{i}, 1, 0)$ como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$, con $\mathbf{v}_\parallel \in W$ y $\mathbf{v}_\perp \in W^\perp$.

Antes de comenzar, simplifiquemos la ecuación de W dividiendo ambos miembros por $(1-\mathrm{i})$:

$$\mathrm{i}x_1 - x_2 + x_3 = 0\,,$$

que, como todas las ecuaciones lineales y homogéneas, puede escribirse como una condición de ortogonalidad,

$$\langle(-\mathrm{i}, -1, 1)|(x_1, x_2, x_3)\rangle = \mathrm{i}x_1 - x_2 + x_3 = 0\,.$$

Tras esta observación resulta inmediato proceder:

1. Hay infinitas base ortonormales de W (por el contrario, para $W^\perp$ la elección es única salvo fase). Una posibilidad aceptable es

$$W = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(-\mathrm{i}, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(\mathrm{i}, 1, 2)}{\sqrt{6}}\Big\}\,, \quad W^\perp = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(-\mathrm{i}, -1, 1)}{\sqrt{3}}\Big\}\,.$$

2. En la base canónica de $\mathbb{C}^3$, la matriz asociada al proyector ortogonal sobre $W^\perp$ es

$$\Pi_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(\mathrm{i}, -1, 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ \mathrm{i} & -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

El proyector sobre W es

$$\Pi_W = \mathbf{1} - \Pi_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

3. Tenemos

$$\Pi_W \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \qquad \Pi_{W^\perp}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\,.$$

que podemos escribir $\mathbf{v}_\parallel = \frac{1}{3}(\mathrm{i}, 1, 2)$, $\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{3}(2\mathrm{i}, 2, -2)$.

Problema 3C

Consideremos el subespacio de $\mathbb{C}^3$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : \ (1+2\mathrm{i})x_1 - (2-\mathrm{i})x_2 + (2-\mathrm{i})x_3 = 0\} \ .$$

Se pide:

1. Una base ortonormal de W y $W^\perp$.
2. Hallar la matriz representativa en la base canónica de los proyectores ortogonales sobre W y $W^\perp$.
3. Descomponer el vector $\mathbf{v} = (-\mathrm{i}, 0, 1)$ como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$, con $\mathbf{v}_\parallel \in W$ y $\mathbf{v}_\perp \in W^\perp$.

Antes de comenzar, simplifiquemos la ecuación de W dividiendo ambos miembros por $(2-\mathrm{i})$:

$$\mathrm{i}x_1 - x_2 + x_3 = 0\,,$$

que, como todas las ecuaciones lineales y homogéneas, puede escribirse como una condición de ortogonalidad,

$$\langle(-\mathrm{i}, -1, 1)|(x_1, x_2, x_3)\rangle = \mathrm{i}x_1 - x_2 + x_3 = 0\,.$$

Tras esta observación resulta inmediato proceder:

1. Hay infinitas base ortonormales de W (por el contrario, para $W^\perp$ la elección es única salvo fase). Una posibilidad aceptable es

$$W = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(-\mathrm{i},1,0)}{\sqrt{2}}, \frac{(\mathrm{i},1,2)}{\sqrt{6}}\Big\}\,, \quad W^\perp = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(-\mathrm{i},-1,1)}{\sqrt{3}}\Big\}\,.$$

2. En la base canónica de $\mathbb{C}^3$, la matriz asociada al proyector ortogonal sobre $W^\perp$ es

$$\Pi_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(\mathrm{i}, -1, 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ \mathrm{i} & -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

   El proyector sobre W es

$$\Pi_W = \mathbf{1} - \Pi_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

3. Tenemos

$$\Pi_W\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad \Pi_{W^\perp}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

   que podemos escribir $\mathbf{v}_\parallel = \frac{1}{3}(-\mathrm{i}, 2, 1)$, $\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{3}(-2\mathrm{i}, -2, 2)$.

Problema 3D

Consideremos el subespacio de $\mathbb{C}^3$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : \ (1-2\mathrm{i})x_1 + (2+\mathrm{i})x_2 - (2+\mathrm{i})x_3 = 0\} \ .$$

Se pide:

1. Una base ortonormal de W y $W^\perp$.
2. Hallar la matriz representativa en la base canónica de los proyectores ortogonales sobre W y $W^\perp$.
3. Descomponer el vector $\mathbf{v} = (1, 0, \mathrm{i})$ como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$, con $\mathbf{v}_\parallel \in W$ y $\mathbf{v}_\perp \in W^\perp$.

Antes de comenzar, simplifiquemos la ecuación de W dividiendo ambos miembros por $-(2+\mathrm{i})$:

$$\mathrm{i}x_1 - x_2 + x_3 = 0 \,,$$

que, como todas las ecuaciones lineales y homogéneas, puede escribirse como una condición de ortogonalidad,

$$\langle(-\mathrm{i}, -1, 1)|(x_1, x_2, x_3)\rangle = \mathrm{i}x_1 - x_2 + x_3 = 0 \,.$$

Tras esta observación resulta inmediato proceder:

1. Hay infinitas base ortonormales de W (por el contrario, para $W^\perp$ la elección es única salvo fase). Una posibilidad aceptable es

$$W = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(-\mathrm{i}, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(\mathrm{i}, 1, 2)}{\sqrt{6}}\Big\}\,, \quad W^\perp = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(-\mathrm{i}, -1, 1)}{\sqrt{3}}\Big\}\,.$$

2. En la base canónica de $\mathbb{C}^3$, la matriz asociada al proyector ortogonal sobre $W^\perp$ es

$$\Pi_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(\mathrm{i}, -1, 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & -1 \\ \mathrm{i} & -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

   El proyector sobre W es

$$\Pi_W = \mathbf{1} - \Pi_{W^\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

3. Tenemos

$$\Pi_W\begin{pmatrix}1\\0\\\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{pmatrix}\,, \qquad \Pi_{W^\perp}\begin{pmatrix}1\\0\\\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\mathrm{i}\\2\mathrm{i}\end{pmatrix}\,.$$

   que podemos escribir $\mathbf{v}_\parallel = \frac{1}{3}(1, 2\mathrm{i}, \mathrm{i})$, $\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{3}(2, -2\mathrm{i}, 2\mathrm{i})$.

Problema 4A

Sea el subespacio lineal de $\mathbb{C}^4$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : \; x_1 + x_4 = 0, \; x_2 - \mathrm{i}x_3 = 0\}\,.$$

Se pide:

1. Matriz representativa en la base canónica de los proyectores ortogonales sobre W y sobre su complemento ortogonal $W^\perp$.
2. Matriz representativa en la base canónica de los operadores $f \in L(\mathbb{C}^4)$ que cumplan las siguientes condiciones:
   a) f es autoadjunto ($f = f^\dagger$),
   b) W es subespacio propio de f,
   c) $\mathrm{Tr}\, f = 0$,
   d) Su cuadrado es el operador identidad (es decir, $f \circ f = \mathbf{1}$).

Las dos condiciones que definen W pueden escribirse como condiciones de ortogonalidad:

$$0 = x_1 + x_4 = \langle(1,0,0,1)|(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle \quad , \quad 0 = x_2 - \mathrm{i}x_3 = \langle(0,1,\mathrm{i},0)|(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle\,,$$

así que podemos dar directamente una base ortonormal de $W^\perp$: $W^\perp = \mathrm{Lin}\Big\{\frac{(1,0,0,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(0,1,\mathrm{i},0)}{\sqrt{2}}\Big\}$. Tras esta observación, el problema se resuelve de manera directa.

1.

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_{W^\perp} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}(1,0,0,1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}(0,1,-\mathrm{i},0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},\\
\hat{\Pi}_W &= \mathbf{1} - \hat{\Pi}_{W^\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. La condición $f \circ f = \mathbf{1}$ nos dice que el espectro de f verifica $\sigma_f \subset \{1, -1\}$. En efecto, sea $\mathbf{v}$ un autovector y λ su correspondiente autovalor:[1]

$$\mathbf{v} = \mathbf{1}(\mathbf{v}) = (f \circ f)(\mathbf{v}) = f(f(\mathbf{v})) = f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v} \implies \lambda^2 = 1\,.$$

Por otro lado, al ser $f = f^\dagger$ sabemos que f es diagonalizable y que sus subespacios propios son ortogonales entre sí. Sean $g_{\lambda=1}$ y $g_{\lambda=-1}$ las multiplicidades geométricas de los dos autovalores posibles. La condición $\mathrm{Tr}\, f = 0 = g_{\lambda=1} - g_{\lambda=-1}$, implica que f tiene dos subespacios propios bidimensionales (y ortogonales entre sí). Como, por hipótesis, W es uno de los dos subespacios propios, el otro subespacio propio ha de ser $W^\perp$. Por tanto, los dos operadores que cumplen las condiciones pedidas son

$$f_1 = \Pi_W - \Pi_{W^\perp} \quad \text{y} \quad f_2 = -f_1\,,$$

y sus matrices representativas en la base canónica son

$$\hat{f}_1 = \hat{\Pi}_W - \hat{\Pi}_{W^\perp} = \begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{f}_2 = -\hat{f}_1\,.$$

[1] Una forma equivalente de demostrarlo es observar que el operador f es, a la vez, autoadjunto y unitario.

Problema 4B

Sea el subespacio lineal de $\mathbb{C}^4$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : \ x_1 + x_4 = 0, \ x_2 + \mathrm{i}x_3 = 0\} \,.$$

Se pide:

1. Matriz representativa en la base canónica de los proyectores ortogonales sobre W y sobre su complemento ortogonal $W^\perp$.
2. Matriz representativa en la base canónica de los operadores $f \in L(\mathbb{C}^4)$ que cumplan las siguientes condiciones:
    a) f es autoadjunto $(f = f^\dagger)$,
    b) W es subespacio propio de f ,
    c) $\mathrm{Tr}\, f = 0$,
    d) Su cuadrado es el operador identidad (es decir, $f \circ f = \mathbf{1}$).

Las dos condiciones que definen W pueden escribirse como condiciones de ortogonalidad:

$$0 = x_1 + x_4 = \langle (1,0,0,1) | (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle \quad , \quad 0 = x_2 + \mathrm{i}x_3 = \langle (0,1,-\mathrm{i},0) | (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle \,,$$

así que podemos dar directamente una base ortonormal de $W^\perp$: $W^\perp = \mathrm{Lin}\Big\{ \frac{(1,0,0,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(0,1,-\mathrm{i},0)}{\sqrt{2}} \Big\}$. Tras esta observación, el problema se resuelve de manera directa.

1.

$$\hat{\Pi}_{W^\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1,0,0,1) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} (0,1,\mathrm{i},0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\hat{\Pi}_W = \mathbf{1} - \hat{\Pi}_{W^\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

2. La condición $f \circ f = \mathbf{1}$ nos dice que el espectro de f verifica $\sigma_f \subset \{1, -1\}$. En efecto, sea $\mathbf{v}$ un autovector y λ su correspondiente autovalor:[2]

$$\mathbf{v} = \mathbf{1}(\mathbf{v}) = (f \circ f)(\mathbf{v}) = f(f(\mathbf{v})) = f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2 \mathbf{v} \implies \lambda^2 = 1 \,.$$

Por otro lado, al ser $f = f^\dagger$ sabemos que f es diagonalizable y que sus subespacios propios son ortogonales entre sí. Sean $g_{\lambda=1}$ y $g_{\lambda=-1}$ las multiplicidades geométricas de los dos autovalores posibles. La condición $\mathrm{Tr}\ f = 0 = g_{\lambda=1} - g_{\lambda=-1}$, implica que f tiene dos subespacios propios bidimensionales (y ortogonales entre sí). Como, por hipótesis, W es uno de los dos subespacios propios, el otro subespacio propio ha de ser $W^\perp$. Por tanto, los dos operadores que cumplen las condiciones pedidas son

$$f_1 = \Pi_W - \Pi_{W^\perp} \quad \text{y} \quad f_2 = -f_1 \,,$$

y sus matrices representativas en la base canónica son

$$\hat{f}_1 = \hat{\Pi}_W - \hat{\Pi}_{W^\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{f}_2 = -\hat{f}_1 \,.$$

[2]Una forma equivalente de demostrarlo es observar que el operador f es, a la vez, autoadjunto y unitario.

Problema 4C

Sea el subespacio lineal de $\mathbb{C}^4$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : \; x_1 - x_4 = 0, \; x_2 - \mathrm{i}x_3 = 0\} \,.$$

Se pide:

1. Matriz representativa en la base canónica de los proyectores ortogonales sobre W y sobre su complemento ortogonal $W^\perp$.
2. Matriz representativa en la base canónica de los operadores $f \in L(\mathbb{C}^4)$ que cumplan las siguientes condiciones:
   a) f es autoadjunto $(f = f^\dagger)$,
   b) W es subespacio propio de f,
   c) $\mathrm{Tr}\, f = 0$,
   d) Su cuadrado es el operador identidad (es decir, $f \circ f = \mathbf{1}$).

Las dos condiciones que definen W pueden escribirse como condiciones de ortogonalidad:

$$0 = x_1 - x_4 = \langle (1, 0, 0, -1) | (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle \quad , \quad 0 = x_2 - \mathrm{i}x_3 = \langle (0, 1, \mathrm{i}, 0) | (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle \,,$$

así que podemos dar directamente una base ortonormal de $W^\perp$: $W^\perp = \mathrm{Lin}\left\{ \frac{(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}}, \frac{(0,1,\mathrm{i},0)}{\sqrt{2}} \right\}$. Tras esta observación, el problema se resuelve de manera directa.

1.

$$\hat{\Pi}_{W^\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(1, 0, 0, -1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}(0, 1, -\mathrm{i}, 0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Pi}_W = \mathbf{1} - \hat{\Pi}_{W^\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La condición $f \circ f = \mathbf{1}$ nos dice que el espectro de f verifica $\sigma_f \subset \{1, -1\}$. En efecto, sea $\mathbf{v}$ un autovector y λ su correspondiente autovalor:[3]

$$\mathbf{v} = \mathbf{1}(\mathbf{v}) = (f \circ f)(\mathbf{v}) = f(f(\mathbf{v})) = f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2 \mathbf{v} \implies \lambda^2 = 1 \,.$$

Por otro lado, al ser $f = f^\dagger$ sabemos que f es diagonalizable y que sus subespacios propios son ortogonales entre sí. Sean $g_{\lambda=1}$ y $g_{\lambda=-1}$ las multiplicidades geométricas de los dos autovalores posibles. La condición $\mathrm{Tr}\; f = 0 = g_{\lambda=1} - g_{\lambda=-1}$, implica que f tiene dos subespacios propios bidimensionales (y ortogonales entre sí). Como, por hipótesis, W es uno de los dos subespacios propios, el otro subespacio propio ha de ser $W^\perp$. Por tanto, los dos operadores que cumplen las condiciones pedidas son

$$f_1 = \Pi_W - \Pi_{W^\perp} \quad \text{y} \quad f_2 = -f_1 \,,$$

y sus matrices representativas en la base canónica son

$$\hat{f}_1 = \hat{\Pi}_W - \hat{\Pi}_{W^\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{f}_2 = -\hat{f}_1 \,.$$

[3]Una forma equivalente de demostrarlo es observar que el operador f es, a la vez, autoadjunto y unitario.

Problema 4D

Sea el subespacio lineal de $\mathbb{C}^4$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : \; x_1 - x_4 = 0, \; x_2 + \mathrm{i}x_3 = 0\}\,.$$

Se pide:

1. Matriz representativa en la base canónica de los proyectores ortogonales sobre W y sobre su complemento ortogonal $W^\perp$.
2. Matriz representativa en la base canónica de los operadores $f \in L(\mathbb{C}^4)$ que cumplan las siguientes condiciones:
   - *a*) f es autoadjunto $(f = f^\dagger)$,
   - *b*) W es subespacio propio de f,
   - *c*) $\mathrm{Tr}\, f = 0$,
   - *d*) Su cuadrado es el operador identidad (es decir, $f \circ f = \mathbf{1}$).

Las dos condiciones que definen W pueden escribirse como condiciones de ortogonalidad:

$$0 = x_1 - x_4 = \langle (1,0,0,-1) | (x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle \quad , \quad 0 = x_2 + \mathrm{i}x_3 = \langle (0,1,-\mathrm{i},0) | (x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle\,,$$

así que podemos dar directamente una base ortonormal de $W^\perp$: $W^\perp = \mathrm{Lin}\left\{\frac{(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}}, \frac{(0,1,-\mathrm{i},0)}{\sqrt{2}}\right\}$. Tras esta observación, el problema se resuelve de manera directa.

1.

$$\hat{\Pi}_{W^\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(1,0,0,-1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}(0,1,\mathrm{i},0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Pi}_W = \mathbf{1} - \hat{\Pi}_{W^\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La condición $f \circ f = \mathbf{1}$ nos dice que el espectro de f verifica $\sigma_f \subset \{1, -1\}$. En efecto, sea $\mathbf{v}$ un autovector y λ su correspondiente autovalor:[4]

$$\mathbf{v} = \mathbf{1}(\mathbf{v}) = (f \circ f)(\mathbf{v}) = f(f(\mathbf{v})) = f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2 \mathbf{v} \implies \lambda^2 = 1\,.$$

Por otro lado, al ser $f = f^\dagger$ sabemos que f es diagonalizable y que sus subespacios propios son ortogonales entre sí. Sean $g_{\lambda=1}$ y $g_{\lambda=-1}$ las multiplicidades geométricas de los dos autovalores posibles. La condición $\mathrm{Tr}\, f = 0 = g_{\lambda=1} - g_{\lambda=-1}$, implica que f tiene dos subespacios propios bidimensionales (y ortogonales entre sí). Como, por hipótesis, W es uno de los dos subespacios propios, el otro subespacio propio ha de ser $W^\perp$. Por tanto, los dos operadores que cumplen las condiciones pedidas son

$$f_1 = \Pi_W - \Pi_{W^\perp} \quad \text{y} \quad f_2 = -f_1\,,$$

y sus matrices representativas en la base canónica son

$$\hat{f}_1 = \hat{\Pi}_W - \hat{\Pi}_{W^\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{f}_2 = -\hat{f}_1\,.$$

[4] Una forma equivalente de demostrarlo es observar que el operador f es, a la vez, autoadjunto y unitario.

Las soluciones de las cuatro variantes del Problema 5 son casi idénticas. Comencemos por recordar los enunciados.

Problema 5A

Considere la siguiente afirmación:

> Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Si un operador lineal $f \in L(V)$ verifica
> (i) Kernel(f^2)=Imagen(f^2), donde $f^2 \equiv f \circ f$, y
> (ii) Dimensión[Kernel(f)]<Dimensión(V),
> entonces f no es diagonalizable.

Si es cierta, demuéstrela. Si es falsa, proporcione un contraejemplo.

Problema 5B

Considere la siguiente afirmación:

> Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Si un operador lineal $f \in L(V)$ verifica
> (i) Kernel(f^2)=Imagen(f^3), donde $f^2 \equiv f \circ f$ y $f^3 \equiv f \circ f \circ f$, y
> (ii) Dimensión[Kernel(f)]<Dimensión(V),
> entonces f no es diagonalizable.

Si es cierta, demuéstrela. Si es falsa, proporcione un contraejemplo.

Problema 5C

Considere la siguiente afirmación:

> Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Si un operador lineal $f \in L(V)$ verifica
> (i) Kernel(f^2)=Imagen(f^4), donde $f^2 \equiv f \circ f$ y $f^4 \equiv f \circ f \circ f \circ f$, y
> (ii) Dimensión[Kernel(f)]<Dimensión(V),
> entonces f no es diagonalizable.

Si es cierta, demuéstrela. Si es falsa, proporcione un contraejemplo.

Problema 5D

Considere la siguiente afirmación:

> Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Si un operador lineal $f \in L(V)$ verifica
> (i) Kernel(f^2)=Imagen(f^5), donde $f^2 \equiv f \circ f$ y $f^5 \equiv f \circ f \circ f \circ f \circ f$, y
> (ii) Dimensión[Kernel(f)]<Dimensión(V),
> entonces f no es diagonalizable.

Si es cierta, demuéstrela. Si es falsa, proporcione un contraejemplo.

En todos los casos la afirmación es verdadera. Llamemos f^k a la composición de f consigo mismo k veces (por ejemplo $f^3 = f \circ f \circ f$). La demostración se agiliza utilizandos estas definiciones.

Definición 1: el operador $f_{\mathbf{0}} \in L(V)$ definido por $f_{\mathbf{0}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\ \forall\, \mathbf{v} \in V$ se denomina *operador nulo*.

Definición 2: Sea $k > 1$ un entero. Un operador $g \in L(V)$ se dice *nilpotente de orden* k si $g^k = f_{\mathbf{0}}$ pero $g^{k-1} \neq f_{\mathbf{0}}$.

Tenemos el siguiente

Lema 1: sean $n, m > 0$ dos enteros positivos. Si $f \in L(V)$ verifica Kernel(f^n)=Imagen(f^m), entonces f es nilpotente de orden k, con $k \leq n + m$.
Demostración: es inmediato ver que $f^{n+m} = f_{\mathbf{0}}$: $\forall\ \mathbf{v} \in V\ \ f^{n+m}(\mathbf{v}) = f^n(f^m(\mathbf{v})) = \mathbf{0}\,.$

Por lo tanto, el operador considerado en las cuatro versiones del problema es nilpotente, pero tenemos cuatro cotas superiores diferentes al orden de nilpotencia:

$k^{\mathbf{A}} \leq 4$, $k^{\mathbf{B}} \leq 5$, $k^{\mathbf{C}} \leq 6$ y $k^{\mathbf{D}} \leq 7$.

Obsérvese que es imposible que f sea el operador nulo $f_{\mathbf{0}}$ por la segunda hipótesis de cada uno de los cuatro enunciados, a saber: Dimensión[Kernel(f)]<Dimensión(V). En este punto es relevante el siguiente

Lema 2: Sea $f \in L(V)$ nilpotente de orden k. El espectro de f, σ_f, cumple $\sigma_f \subset \{0\}$.[5]
Demostración: Sea λ un autovalor de f y $\mathbf{v}$ un autovector correspondiente a λ. Tenemos que

$$\mathbf{0} = f_{\mathbf{0}}(\mathbf{v}) = f^k(\mathbf{v}) = \lambda^k \mathbf{v} \implies \lambda^k = 0 \text{ (porque } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\text{, al ser autovector)} \implies \lambda = 0\,.$$

Así pues, para que el operador fuese diagonalizable sería imprescindible que el subespacio propio fuese

$$V_{\lambda=0} = \text{Kernel}(f) = V\,,$$

lo que *es imposible* (porque contradice la segunda hipótesis de cada uno de los cuatro enunciados).

[5]En realidad $\sigma_f = \{0\}$, pero no necesitamos demostrar esta afirmación (que es ligeramente más fuerte que el Lema 2).