Análisis de Algoritmos, Gr. Ing. Informática
Examen Final, Segunda Parte, Enero 2021

Apellidos: **Nombre:**
Grupo: **Aula:** **Bloque:**

1	2	P. 2

Preguntas

1. ~~a~~. (3 puntos) ~~i~~. ¿Cuál es la profundidad del árbol de decisión de QuickSort sobre tablas de 30 elementos?

   ~~ii~~. Vamos a aplicar la rutina de creación de un Max Heap a una tabla con 8 elementos. Indicar cuántas comparaciones de clave se harán como máximo durante dicha creación. N-1

   ~~iii~~. ¿Cuál es la longitud de caminos externos de un árbol binario completo de profundidad 10?

   ~~b~~. (3 puntos) Tras crear un max heap sobre una cierta permutación se llega a la siguiente tabla `[18 15 4 12 11 3]`.
   Argumentar que la misma es en efecto un max heap y ordenarla según la segunda parte del algoritmo HeapSort indicando adecuadamente los pasos dados.

   c. (4 puntos) Estimar razonadamente el crecimiento de una función positiva T que cumple $T(1) = 0$ y

   $$T(N) \leq \sqrt{N} + 9T\left(\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor\right).$$

   Estimar primero un posible crecimiento en un caso particular adecuado y usarlo a continuación para estimar el crecimiento en el caso general.

2. ~~a~~. (2 puntos) ~~i~~. ¿Qué relación hay entre el caso medio $A_{XS}(N)$ sobre tablas de N elementos de un algoritmo XS de ordenación por comparación de claves y la longitud de caminos externos lce de su árbol de decisión T_{XS}^N?

   ~~ii~~. ¿Con qué permutación se alcanzaría el caso peor $W_{QS}(7)$ del algoritmo QuickSort?

   b. (4 puntos) El siguiente pseudocódigo corresponde a una versión `msort_inv` de MergeSort donde se ordena **primero la segunda** tabla y luego la primera.

```
def msort_inv(tabla t, indice p, indice u):
    if p == u:
        return OK

    else:
        m = (p+u)/2              //division entera
        t_1 = msort_inv(t, m+1, u)
        t_2 = msort_inv(t, p, m)
        return combinar(t_1, t_2, t)
```

   Dar el subárbol de decisión para tablas de 4 elementos cuando se aplica a permutaciones σ en las que $\sigma(2) = 4$.

   c. (4 puntos) El siguiente pseudocódigo recursivo calcula el valor del n-esimo número de Fibonacci:

```
int fib(int t):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

   Queremos estimar razonadamente en función de n cuántas **sumas** efectuará dicho algoritmo para calcular

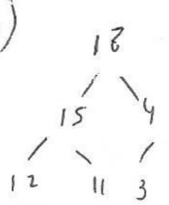
1) a) i) $\mathrm{Prof}(T_{QS}^{30}) = W_{QS}(30) = \frac{30^2}{2} - \frac{30}{2} = \boxed{435}$

ii) $W_{CREAR}(N) \leq \frac{N}{2} \cdot \log_2 N = \frac{8}{2} \cdot \log_2 8 = \frac{8 \cdot 3}{2} = \boxed{12}$

TAMBIÉN VALE LA SOLUCIÓN $\boxed{W_{CREAR}(8) \leq 7}$

iii) $LCE = 10 \cdot 2^{10} = \boxed{10240}$

b)

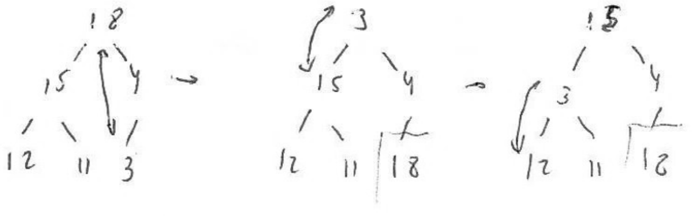


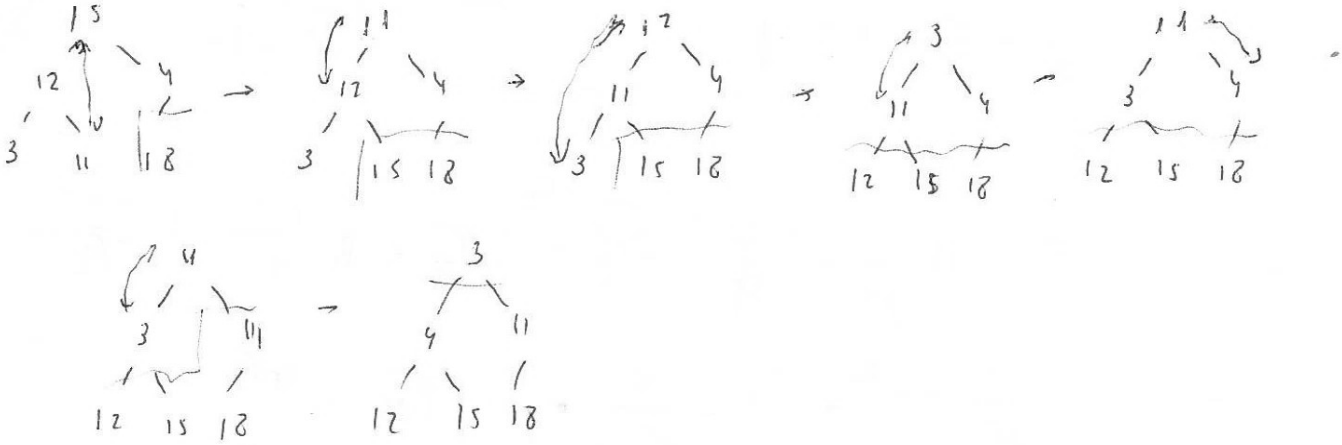
Es maxheap

$18 > 15, 4$

$15 > 12, 11$

$4 > 3$





c) Sea $N = 3^k$

Si $N = 3^k$

$$T(N) \leq \sqrt{N} + 3^2 T\left(\frac{N}{3}\right) \leq \sqrt{N} + 3^2\left[\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{3}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^2}\right)\right] =$$

$$T\left(\frac{N}{3}\right) \leq \sqrt{\frac{N}{3}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^2}\right) \qquad = \sqrt{N} + \sqrt{N} \cdot \frac{3^2}{\sqrt{3}} + 3^4 T\left(\frac{N}{3^2}\right) \leq$$

$$T\left(\frac{N}{3^2}\right) \leq \sqrt{\frac{N}{3^2}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^3}\right) \qquad \sqrt{N} + \sqrt{N} \cdot \frac{3^2}{\sqrt{3}} + 3^4\left[\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{3^2}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^3}\right)\right] =$$

$$T\left(\frac{N}{3^3}\right) \leq \sqrt{\frac{N}{3^3}} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^4}\right) \qquad \sqrt{N} + \sqrt{N} \cdot \underbrace{\frac{3^2}{\sqrt{3}}}_{3^{3/2}} + \sqrt{N}\underbrace{\frac{3^4}{\sqrt{3^2}}}_{3^{3/2}} + 3^6 T\left(\frac{N}{3^3}\right) \leq$$

Si $N = 3^k$

$$\ldots \; 3^6\left[\frac{\sqrt{N}}{\ldots} + 3^2 T\left(\frac{N}{3^4}\right)\right] =$$

$$\sqrt{N} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(3^{3/2}\right)^i = \sqrt{N} \sum_{i=0}^{k-1} \left(3\sqrt{3}\right)^i = \sqrt{N}\left(\frac{(3\sqrt{3})^k - 1}{3\sqrt{3} - 1}\right) =$$

$$= \sqrt{N}\left(\frac{N\sqrt{N}-1}{3\sqrt{3}-1}\right) = \boxed{\frac{1}{3\sqrt{3}-1}\cdot\left(N^2-\sqrt{N}\right)}$$

Caso general

$$T(N) \leq \sqrt{N} + 9T\left(\left\lfloor \tfrac{N}{3} \right\rfloor\right)$$

$$T(1) = \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\left(1^2-1\right) = 0 \text{ ok}$$

Sup cierto que $T(N') \leq \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\left(N'^2-\sqrt{N'}\right)$ si $N' < N$

$$T(N) \leq \sqrt{N} + 9T\left(\left\lfloor \tfrac{N}{3} \right\rfloor\right) \underset{\substack{\text{hyp} \\ \text{Inducción}}}{\leq} \sqrt{N} + 9\left(\frac{1}{3\sqrt{3}-1}\left(\left\lfloor \tfrac{N}{3}\right\rfloor^2 - \sqrt{\left\lfloor \tfrac{N}{3}\right\rfloor}\right)\right) \underset{\substack{x^2-\sqrt{x} \text{ creciente} \\ y \lfloor x \rfloor \leq x}}{\leq}$$

$\left\lfloor \tfrac{N}{3} \right\rfloor < N$

$$\sqrt{N} + 9\left[\frac{1}{3\sqrt{3}-1}\left(\frac{N^2}{9} - \sqrt{\frac{N}{3}}\right)\right] = \sqrt{N} + \cancel{9}\cdot\left[\frac{1}{3\sqrt{3}-1}\left(N^2 - \frac{9}{\sqrt{3}}\sqrt{N}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}-1}N^2 + \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\cdot\frac{9}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1}N^2 + \left(1 - \frac{9}{9-\sqrt{3}}\right)\sqrt{N} =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}-1}N^2 + \left(\frac{\cancel{9}-\sqrt{3}-\cancel{9}}{9-\sqrt{3}}\right)\sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1}N^2 + \frac{-\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}}\sqrt{N} =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}-1}N^2 + \frac{-1}{9/\sqrt{3}-1}\sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1}N^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\cdot\left[N^2-\sqrt{N}\right]$$

$9/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

//

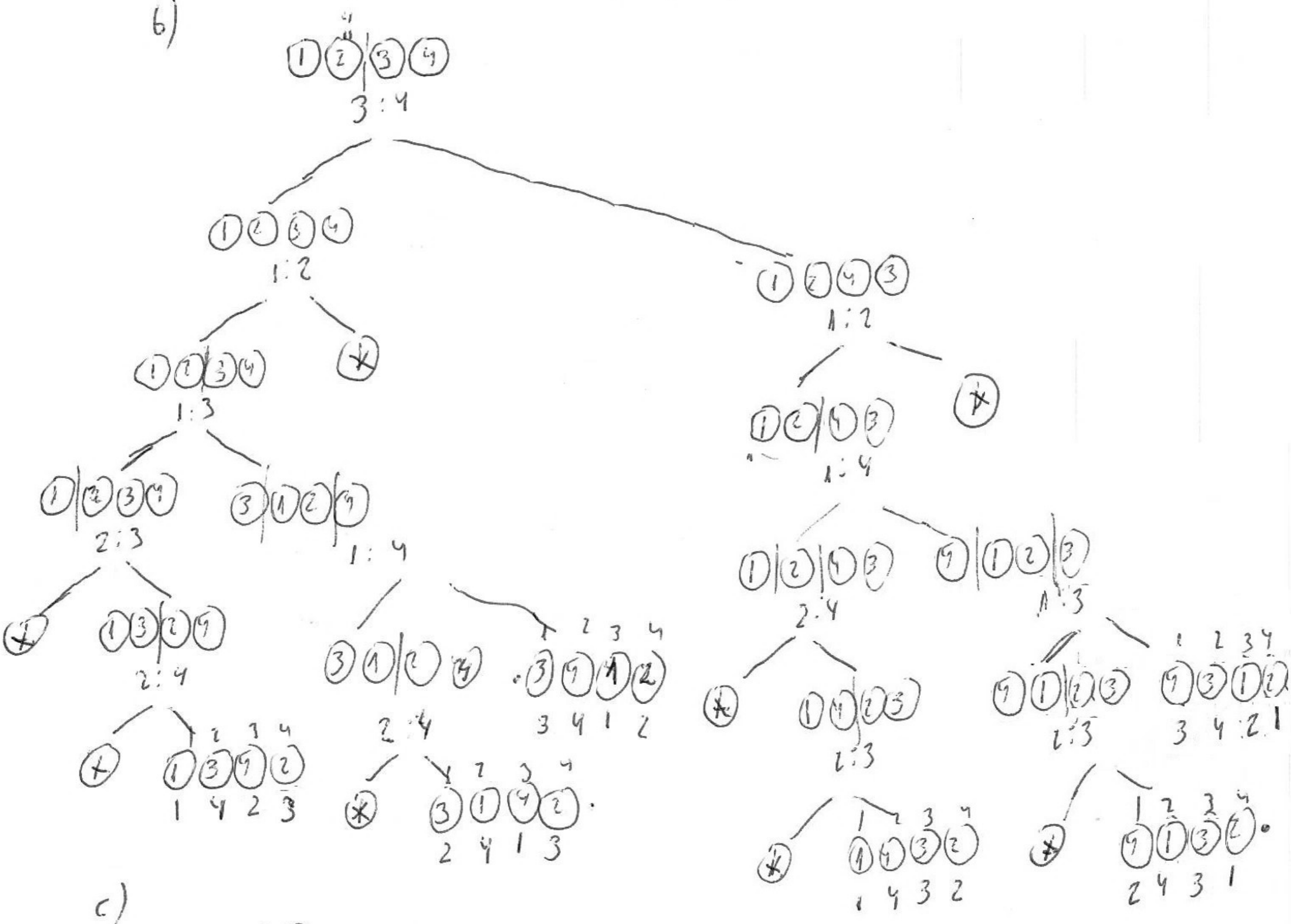
2)

a)

i) $A_{xs}(N) = \boxed{\frac{1}{N!}\, LCC(T_{xs}^{N})}$

ii) $\left| n_{as}\boxed{[1,2,3,4,5,6,7]} \right| = \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} = W_{as}(7)$

b)



c)

$n=0 \rightarrow 0$

$n=1 \rightarrow 0$

$n=2 \rightarrow 1$

$n=3 \rightarrow 2$

$n=4 \rightarrow 4$

En general

$n_{fib}(n) = n_{fib}(n-1) + n_{fib}(n-2) + 1$

$n_{fib}(0)=0 \rightarrow N_{fib}(0)=1$

$n_{fib}(1)=0 \qquad N_{fib}(1)=1$

$N_{fib}(n) = n_{fib}(n) + 1$

$N_{fib}(N) = F_N \implies n_{fib}(n) = N_{fib}(n) - 1 = \boxed{F_n - 1}$