Examen Parcial

Métodos Matemáticos de Bioingeniería
Ingeniería Biomédica

23 de Noviembre 2018

El tiempo para realizar el examen es de dos horas. Se puede utilizar la calculadora y dos hojas con anotaciones.

- Nombre:
- Apellidos:
- DNI:

Problemas

1. La trayectoria de una nave en el espacio, que se dirige al encuentro de otra nave (*rendezvous*), viene dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3t^3 + 7 \\ y = 2 - t^3 \\ z = 5t^3 + 1 \end{cases}$$

La nave empieza el viaje en el instante $t = 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la distancia en metros.

(a) (**0,5 puntos**) ¿Sigue la nave una trayectoria rectilínea? En tal caso, ¿es el movimiento uniforme? Razona tu respuesta.

(b) (**1 punto**) Si el punto de encuentro está en el plano $\pi : (x-88)+(y+25)+(z-136) = 0$, ¿en qué instante de tiempo llega la nave al encuentro?

(c) (**2 puntos**) Reparametrizar la trayectoria de $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{x}(s)$ donde s es el parámetro longitud de arco. ¿En qué instante de tiempo llegaría la nave al encuentro si siguiese la trayectoria con una velocidad constante de 1 m/s?

SOLUCIÓN

(a) Si hacemos el cambio de variable $s = t^3$ nos queda una ec. paramétrica de una recta:

$$\begin{cases} x = 3s + 7 \\ y = 2 - s \\ z = 5s + 1 \end{cases}$$

También se puede despejar t^3 en cada ecuación y obtener la forma continua de la recta.

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{5}$$

El movimiento es rectilíneo pero no es uniforme ya que la norma del vector velocidad no es constante, depende del parámetro t.

$$\|c'(t)\| = \|(9t^2, -3t^2, 15^2)\| \neq \text{cte.}$$

(b) El punto de encuentro esta en la trayectoria (recta) y además en el plano, luego será el punto de corte de la recta con el plano. Sustituyendo la ec. de la recta en el plano queda:

$$\begin{aligned} (3t^3 + 7 - 88) + (2 - t^3 + 25) + (5t^3 + 1 - 136) &= 0 \\ (3t^3 - 81) + (-t^3 + 27 + (5t^3 - 135) &= 0 \\ 7t^3 - 189 &= 0 \\ t^3 &= 27 \\ t &= 3 \text{ seg.} \end{aligned}$$

(c) $s(t) = \int_0^t \|c'(t)\| \, d\tau = \int_0^t \sqrt{(9\tau^2)^2 + (-3\tau^2)^2 + (15\tau^2)^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{315} \cdot \tau^2 d\tau = \sqrt{35} t^3$

Para reparametrizar la trayectoria necesitamos poner s en funcion de t. Despejando nos queda:

$$t(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{35}}\right)^{1/3}$$

Queda pues que la trayectoria reparametrizada es:

$$\vec{c}(s) = \left(\frac{3}{\sqrt{35}} s + 7,\ 2 - \frac{s}{\sqrt{35}},\ \frac{5}{\sqrt{35}} s + 1\right)$$

O lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} x(s) = \frac{3}{\sqrt{35}} s + 7 \\ y(s) = 2 - \frac{s}{\sqrt{35}} \\ z(s) = \frac{5}{\sqrt{35}} s + 1 \end{cases}$$

Para ver cuanto tarda con velocidad constante unitaria podemos volver a cortar el plano con la nueva reparametrización $x(s)$ (por definición $x(s)$ tiene vector tangente/velocidad unitario) o observar que para llegar al mismo punto (punto de encuentro) se recorre la misma distancia, independientemente de la parametrización. Luego lo que se recorre en 3 seg. con la parametrización t se recorre en s(3) con la parametrización s:

$$s(3) = 27\sqrt{35} \text{ seg.} \approx 160 \text{ seg.}$$

2. Considera la figura descrita por la ecuación en coordenadas cilíndrica siguiente: $(r/a)^2 + (z/b)^2 = 1$ con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes.

   (a) (**1 punto**) Identifica la figura geométrica que se obtiene cuando $\theta = \pi$.

   (b) (**0,5 puntos**) Describe cómo se puede generar la superficie de la ecuación. Ayúdate de un dibujo.

   (c) (**0,5 punto**) Supón que la ecuación modeliza la membrana de una célula. Describe algebraicamente el interior de la célula. Utiliza coordenadas cilíndricas para ello.

SOLUCIÓN

(a) Cuando el ángulo θ es π

$$\begin{cases} x = r\cos\pi = -r \\ y = r\sin\pi = 0 \end{cases}$$

Luego sustituyendo en la ecuación queda:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \ \rightarrow \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

que es una elipse de semiejes a, b en el plano-xz.

(b) La ecuación inicial no depende de θ luego $\forall\theta$ queda siempre la misma figura, la elipse. Por lo tanto la superficie se puede generar como una superficie de revolución girando la elipse alrededor del eje z, lo que quedaría como una pelota abombada o "nave extraterrestre".

(c) $D = \left\{(r, \theta, z);\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le a,\ -b\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \le z \le b\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right\}$.

3. (**2 puntos**) Considera la función

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^4} & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudia la continuidad, la existencia de las derivadas parciales y la diferenciabilidad de la función g en el punto $(0, 0)$.

SOLUCIÓN

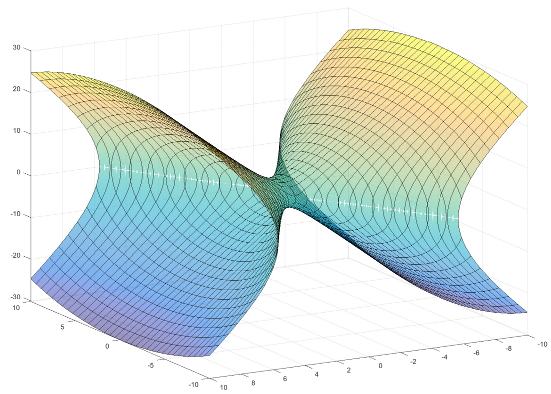
Pasando a polares y calculando el límite en el origen se puede ver que la función no es continua ya que el límite depende del ángulo. Por tanto, tampoco será diferenciable. Las derivadas parciales fuera del origen existen ya que es cociente de polinomios. En el origen aplicamos la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Luego existen y el valor que toman en el origen es 0.

4. Supón que para modelizar de forma aproximada la superficie de una de las piezas de una prótesis articular se utiliza el hiperboloide que se representa en la figura siguiente



Dicho hiperboloide viene dado por la ecuación

$$3x^2 - 9y^2 + z^2 = 10$$

(a) (**1,5 punto**) Calcula los puntos del hiperboloide donde el plano tangente es paralelo al plano

$$-6x + 18y + 8z = 7$$

(b) (**1 punto**) Calcula la distancia existente entre los puntos obtenidos en el apartado a) y la recta

$$r : \begin{cases} -6x + 18y + 8z & = 0 \\ 2x + 2y - 3z & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

SOLUCIÓN

(a) Consideramos la función implícita $F(x,y,z) = 3x^2 - 9y^2 + z^2 - 10$. El gradiente es $\nabla F(x,y,z) = (6x, -18y, 2z)$. La función gradiente en un punto (x,y,z) de la superficie nos da el vector normal a la superficie. Como queremos que el plano tangente sea paralelo al plano dado por el enunciado igualamos el vector gradiente con el normal del plano (incluyendo una constante de proporcionalidad):

$$(6x, -18y, 2z) = k(-6, 18, 8)$$

Que nos da este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x = -6k \ \to x = -k \\ -18y = 18k \ \to y = -k \\ 2z = 8k \ \to z = 4k \end{cases} \tag{2}$$

Sustituyendo en la ec. del hiperboloide

$$\begin{aligned} 3(-k)^2 - 9(-k)^2 + (4k)^2 = 10 &= 10 \\ 3k^2 - 9k^2 + 16k^2 &= 10 \\ 10k^2 &= 10 \\ k &= \pm 1 \end{aligned}$$

Por tanto, los puntos que pide el enunciado son: $(-1, -1, 4)$ y $(1, 1, -4)$.

(b) Para calcular la distancia entre una recta y un punto utilizamos la siguiente fórmula:

$$D = \frac{\|d \times \vec{AB}\|}{\|d\|}$$

donde d es el vector director de la recta, A un punto de la recta y B el punto del cual queremos calcular la distancia.

Pasando a paramétricas la recta resulta que $d = (-35, -1, -24)$. Sea $B = (0, 0, 0)$ y $A = (1, 1, -4)$, Luego $\vec{AB} = (1, 1, 4)$. Calculando el producto vectorial queda:

$$d \times \vec{AB} = (28, -164, -34)$$

Por lo que:

$$D = \frac{\sqrt{28^2 + (-164)^2 + (-34)^2}}{\sqrt{35^2 + 1^2 + 24^2}} \approx 4,0003$$

La distancia al otro punto es la misma.