Teoría de la Integral y de la Medida **Segundo examen parcial, 1/12/2020**

Grado de Matemáticas y Doble Grado Departamento de Matemáticas, UAM

---

1. Sean μ^*, ν^* dos medidas exteriores sobre un conjunto X.

a) (1 punto) Demostrar que $\mu^* + \nu^*$ es también una medida exterior.

b) (1.5 puntos) Demostrar que un subconjunto A de X es $\mu^*+\nu^*$-medible si y solo si es μ^*-medible y ν^*-medible.

---

2. Sea $\mathrm{d}F$ la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^2[x] & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) (1 punto) Encontrar los valores $\mathrm{d}F((1,3])$, $\mathrm{d}F([1,3])$ y $\mathrm{d}F(\{2\})$.

b) (1 punto) Encontrar una función medible y no negativa g en $(1,2)$ de forma que para todo Borel $A \subset (1,2)$ se tenga

$$\mathrm{d}F(A) = \int_A g(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) (1 punto) Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ el conjunto de los números naturales. Encontrar una función g medible y no negativa en $\mathbb{R}$ y las constantes c_n tales que

$$\mathrm{d}F = \nu + \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_n,$$

donde

$$\nu(A) = \int_A g(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo Borel $A \subset \mathbb{R}$ y δ_a es la medida delta de Dirac, concentrada en un punto $a \in \mathbb{R}$.

---

3. Se consideran las siguientes medidas en $\mathbb{R}$:

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\delta_{1/n}, \quad \nu = \sum_{0\leq p/q\leq 1} \frac{1}{q^2}\delta_{p/q}, \quad \eta = \sum_{0\leq p/q\leq 1} \frac{1}{q^3}\delta_{p/q}.$$

En los últimos dos sumatorios, p/q recorre todas las fracciones racionales irreducibles que están entre 0 y 1.

a) (1 punto) ¿Son medidas finitas? ¿Son σ-finitas?

b) (1 punto) Demostrar que ρ y η son medidas de Lebesgue-Stiltjes, mientras que ν no lo es. Sean $\rho = dF$ y $\eta = dG$, donde $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son las correspondientes funciones crecientes. Esbozar la gráfica de F.

c) (1 punto) Demostrar que G es discontinua en puntos racionales del intervalo $[0,1]$ y es continua en puntos irracionales.

d) (1.5 puntos) Demostrar que G no es constante en ningún subintervalo del intervalo $[0,1]$.
