Estadística I, tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2017-2018
Examen parcial 1, 3-11-2017

1. (2 puntos) Sea X una variable aleatoria con $\mathbf{E}(X) = 0$, $\mathbf{E}(X^2) = 1$ y $\mathbf{E}(X^3) = 0$. Nombramos a los dos siguientes momentos como $\mathbf{E}(X^4) = a$ y $\mathbf{E}(X^5) = b$. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de X de tamaño n, y sea $\overline{X}$ la media muestral asociada.

a) Escribe, en términos de los momentos de X y del tamaño de la muestra, $\mathbf{E}\big[\,\overline{X}^{\,5}\big]$.

b) Escribe, en términos de los momentos de X y del tamaño de la muestra,

$$\frac{\mathbf{E}\big[(\overline{X} - \mathbf{E}(\overline{X}))^5\big]}{\mathbf{V}(\overline{X})^{5/2}}$$

$$\text{a)}\quad \mathbf{E}\big[\,\overline{X}^{\,5}\big] = \frac{b}{n^4}\,; \qquad \text{b)}\quad \frac{\mathbf{E}\big[(\overline{X} - \mathbf{E}(\overline{X}))^5\big]}{\mathbf{V}(\overline{X})^{5/2}} = \frac{b}{n^{3/2}}$$

2. (2 puntos) Sea $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\intercal$ un vector aleatorio que sigue una distribución $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I_{n\times n})$. Aquí, $\mathbf{0}$ denota el vector n-dimensional de ceros, e $I_{n\times n}$, la matriz identidad de esas dimensiones.

Definimos un vector aleatorio $\mathbb{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)^\intercal$ como sigue:

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1, \\ Z_2 &= X_1 - X_2, \\ Z_3 &= X_1 - X_3, \\ &\vdots \\ Z_{n-1} &= X_1 - X_{n-1}, \\ Z_n &= X_1 - X_n. \end{aligned}$$

Justifica por qué $\mathbb{Z}$ sigue una normal multidimensional, y calcula sus parámetros (vector de medias y matriz de varianzas/covarianzas).

El vector $\mathbb{Z}$ se puede escribir como $\mathbb{Z} = B\mathbb{X}$, donde B es una matriz $n \times n$ *invertible*. Por tanto, $\mathbb{Z}$ sigue una normal n-dimensional con vector de medias $\mathbf{0}$ y matriz de varianzas/covarianzas dada por

$$\mathbf{V}(Z_1) = 1, \qquad \mathbf{V}(Z_i) = 2 \quad \text{para } i = 2, \ldots, n; \qquad \operatorname{cov}(Z_i, Z_j) = 1 \quad \text{para } i \neq j.$$

3. (2 puntos) Sea $(X_1, \ldots, X_{100})$ una muestra aleatoria de una variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 4$. Calcula

$$\mathbf{P}\big(1/2 \leq |\overline{X}| \leq 1\,,\, 2 \leq S^2 \leq 4\big)$$

(la coma significa que suceden ambos sucesos a la vez; puedes dejar escritas las respuestas en términos de Φ, la función de distribución de la normal estándar, y/o de la función de distribución de una χ^2).

Aplicando el teorema de Fisher-Cochran y la simetría de la normal estándar,

$$\mathbf{P}\big(1/2 \leq |\overline{X}| \leq 1\,,\, 2 \leq S^2 \leq 4\big) = 2\big(\Phi(5) - \Phi(5/2)\big) \cdot \big(F_{\chi^2_{99}}(99) - F_{\chi^2_{99}}(99/2)\big).$$

Aquí, Φ denota la función de distribución de la normal estándar, y $F_{\chi^2_{99}}$, la función de distribución de una χ^2 con 99 grados de libertad.

4. (2 puntos) Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)\,x^{\theta} & \text{si } x \in [0,1]; \\ 0 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

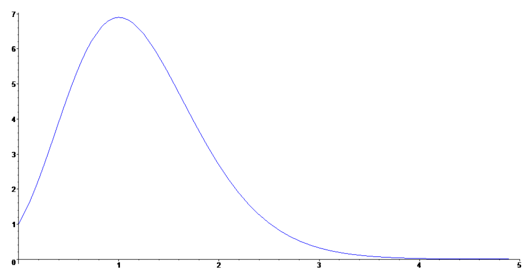
El parámetro θ es positivo.

Se dispone de una muestra $(x_1, \ldots, x_{10})$ de tamaño 10 en la que la suma $\sum_{i=1}^{10} x_i$ vale 7 y el producto $\prod_{i=1}^{10} x_i$ vale $1/e^5$.

a) Halla la estimación de θ por el método de momentos.

b) Halla la estimación de θ por el método de máxima verosimilitud.

La estimación por momentos es $\hat{\theta} = 4/3$. La estimación por máxima verosimilitud es $\hat{\theta} = 1$. Aspecto de la función de verosimilitud:



5. (2 puntos) Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2/\theta & \text{si } x \in [0, \theta/2], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con parámetro $\theta > 0$. Consideramos el siguiente estimador para muestras de X de tamaño n:

$$T(X_1, \ldots, X_n) = 2\,\text{máx}(X_1, \ldots, X_n).$$

Halla el sesgo de T como estimador de θ.

El sesgo es

$$\mathbf{E}_{\theta}(T) - \theta = \frac{-\theta}{n+1}.$$