**Problema 1** (*1.5 puntos*). La viga *ABCD* está apoyada-articulada sobre dos columnas de igual longitud, tal cual se indica en la figura 3. En el extremo derecho se le aplica una carga puntual *Q*. Determine:

a) ¿Qué columna pandeará primero? ¿Por qué? (*0.2 puntos*)

b) Calcule el valor máximo permitido de la carga *Q* para que el sistema no pandee (*1 punto*)

c) Si la normativa nos obliga a usar un factor de seguridad contra pandeo de 10, ¿cuál sería el valor máximo permitido de Q en este caso? (*0.3 puntos*)

***Nota:*** **El área de la columna *BE* es el doble que el de la columna *CF*.**

a) Con la carga Q, la columna que pandeará primero es la columna BE, ya que para que la columna CF pandee sería necesaria una fuerza en sentido contrario

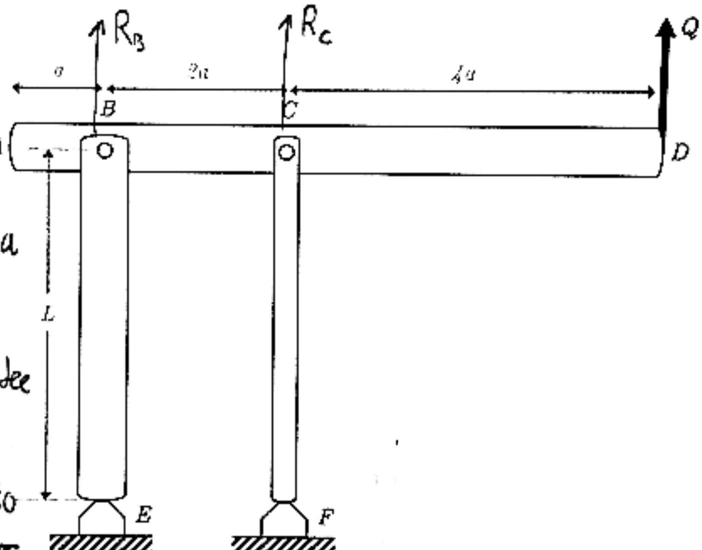



*Figura 3*

b)

Equilibrio estático

$\Sigma F_y = 0 \qquad Q + R_B + R_C = 0$

$\Sigma M^B = 0 \qquad 2a\,R_C + 6a\,Q = 0$

$\Sigma M^C = 0 \qquad -2a\,R_B + 4a\,Q = 0$

$$\boxed{Q_C = -\frac{1}{3} R_C}$$

$$\boxed{Q_B = \frac{1}{2} R_B}$$

$$\boxed{I_{BE} = 2\,I_{CF}}$$

$$R_C = P_{cr_{CF}} = \frac{\pi^2 E I_{CF}}{L^2}$$

$$\boxed{Q_C = -\frac{\pi^2 E I_{CF}}{L^2}}$$

Pero esta sería en sentido contrario

$$R_B = P_{cr_{BE}} = \frac{\pi^2 E I_{BE}}{L^2}$$

$$\boxed{Q_{cr} = Q_B = \frac{\pi^2 E I_{BE}}{2L^2}}$$

c) Si $n = 10$ entonces:

$$R_B = P_{adm_{BE}} = \frac{P_{cr_{BE}}}{10} = \frac{\pi^2 E I_{BE}}{10 L^2}$$

$$\boxed{Q_{cr} = Q_B = \frac{\pi^2 E I_{BE}}{20 L^2}}$$

**PROBLEMA 2** (*2.5 puntos*). Un eje sólido de poliuretano *ABC-D* es impulsado en *A* por un motor que transmite una potencia de 100 kW al eje a una velocidad de giro de 500 *rpm*. Los engranajes en *B* y *D* impulsan maquinaria consumiendo el 50 % de la potencia total, cada uno.

a) Dibuje el diagrama de momento torsor en el eje (*0.5 puntos*)

b) Calcule el ángulo de torsión en el punto *E*, localizado en el centro del tramo *CD* (*0.75 puntos*)

c) Calcule y localice la tensión tangencial máxima en el eje (*0.75 puntos*)

d) Si la resistencia mecánica al corte del poliuretano es de 0.03 MPa, razone debidamente si se romperá el eje y en qué tramo (*0.5 puntos*)

*Nota:* Considere $G = 0.1$ MPa, $L = 50$ cm, el diámetro mayor de 10 cm y el momento polar de inercia de una sección circular de diámetro $d$ como $I_p = \pi d^4/32$.

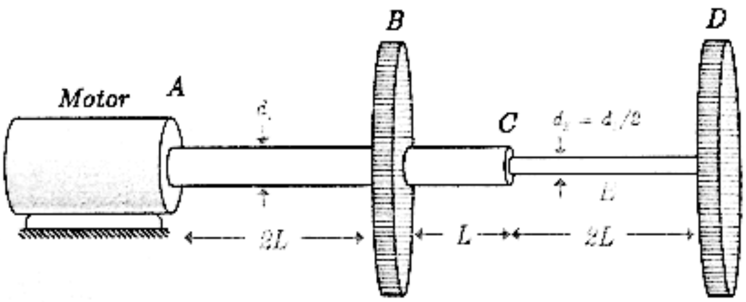



***Figura 4***

a) $P = T \cdot \omega$ $\qquad T = \dfrac{P}{\omega} = \dfrac{100.000}{\frac{500 \cdot 2 \cdot \pi}{60}} = 1909'85\ N \cdot m$

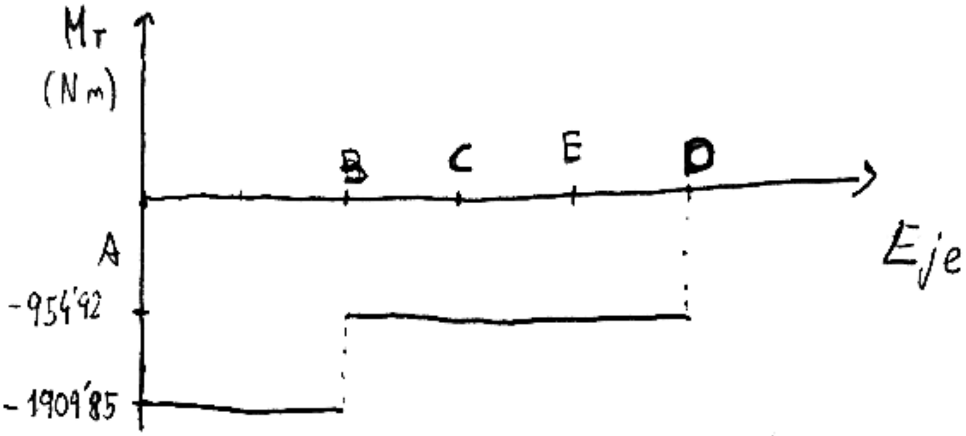
$$\boxed{T_B = T_D = \frac{T}{2} = 954'92\ N \cdot m}$$

$T_{AB} = 954'92 + 954'92 = 1909'85\ N\ m$

$T_{BC} = 954'92\ N \cdot m$

Dibujo $\xrightarrow[\text{pág}]{}$

En el dibujo $M_T$ tiene valores negativos ya que son los momentos de reacción ante la fuerza externa que es el motor.




b) $\boxed{\phi_E = \phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CE}}$

$$\phi_{AB} = \frac{M_{AB} L_{AB}}{G\, I_{pAB}} = \frac{M_{AB} \cdot 2 \cdot L}{G \cdot I_{pAB}} = \boxed{1945'37 \text{ rad}}$$

$$I_{pAB} = \frac{\pi d_1^4}{32} = 9'8174 \cdot 10^{-6} \qquad I_{pBC} = \frac{\pi d_1^4}{32} = 9'8174 \cdot 10^{-6}$$

$d_1 = 10$ cm

$$I_{pCE} = \frac{\pi d_2^4}{32} = 6'1359 \cdot 10^{-7}$$

$$\phi_{BC} = \frac{M_{BC} \cdot L_{BC}}{G\, I_{pBC}} = \frac{M_{BC} \cdot L}{G\, I_{pBC}} = \boxed{486'34 \text{ rad}}$$

$$\phi_{CE} = \frac{M_{CE} L_{CE}}{G\, I_{pCE}} = \frac{M_{CE} \cdot L}{G\, I_{pCE}} = \boxed{7781'41 \text{ rad}}$$

$\pi$ rad – 180°

$$\boxed{\phi_E = 10.213'12 \text{ rad}}$$

c) $\tau_{AB} = \dfrac{M_{AB}\,16}{\pi d_1^3} = 9'7267 \text{ MPa}$

$\tau_{BC} = \dfrac{M_{BC}\,16}{\pi d_1^3} = 4'8633 \text{ MPa}$

$\tau_{CD} = \dfrac{M_{CD}\cdot 16}{\pi d_2^3} = 38'9 \text{ MPa}$

La tensión tangencial máxima está en el tramo CD

$$\boxed{\tau_{max} = 38'9 \text{ MPa}}$$

d) Si, primero en el tramo CD ya que es donde la tensión tangencial es mayor. Pero se rompería en cualquiera pues todas son mayores.

**PROBLEMA 3** (*4 puntos*). Un elemento en tensión plana está sometido a las tensiones $\sigma_x$, $\sigma_y$, y $\tau_{xy}$, según se indica en la figura 3. Realice lo siguiente:

a) Dibuje el círculo de Mohr para este elemento (*0.5 puntos*)

b) Determine sobre el círculo de Mohr cuánto valen las tensiones y los ángulos principales (*0.5 puntos*)

c) Represente en un croquis debidamente orientado las tensiones y los ángulos principales, y las tensiones tangenciales correspondientes (*0.5 puntos*)

d) Determine las tensiones tangenciales máximas y mínimas, y sus ángulos respectivos (*0.5 puntos*)

e) Represente en un croquis debidamente orientado las tensiones tangenciales máximas y mínimas, y las tensiones normales correspondientes (*0.5 puntos*)

f) Supongamos que queremos romper este material, que tiene una resistencia mecánica a compresión de 40 MPa y a tracción de 5 MPa, ¿son suficiente las tensiones de la figura para romperlo? Si contesta afirmativamente, ¿cuál sería la inclinación del plano de ruptura? Si contesta negativamente, indique la dirección en la que ejercería una tensión adicional para romper el material (*1 punto*)

g) Calcule analíticamente usando las relaciones de transformación, la distribución de tensiones de un plano localizado a 15º con respecto al elemento de tensión plana de la figura 5 (*0.5 puntos*)

*NOTA: Dibuje tantos círculos de Mohr como sea necesario para que los resultados se muestren claramente.*

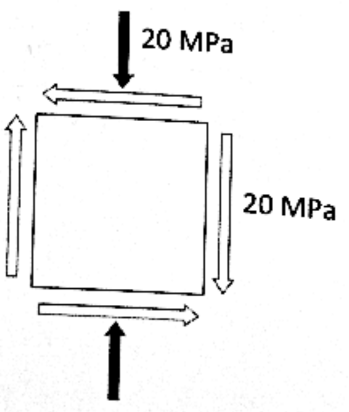
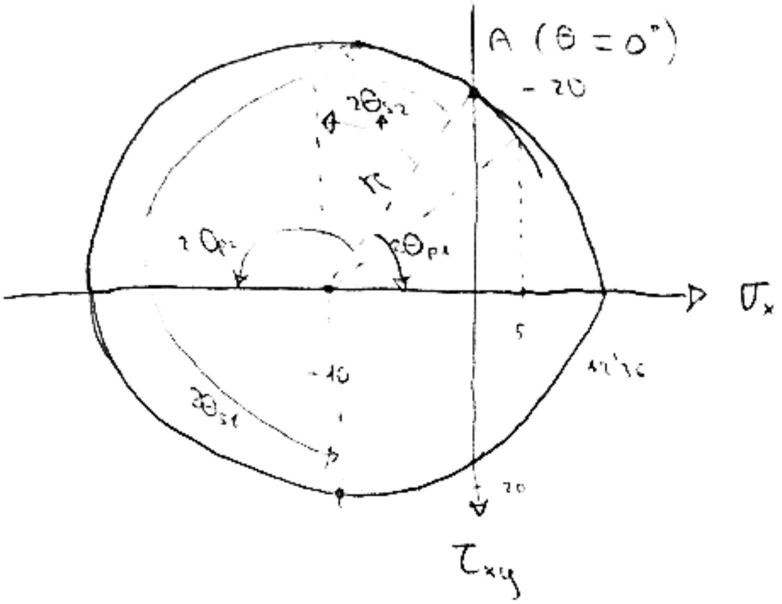



**Figura 5**

3) a)

$C = (\sigma_{prom}, 0) = (-10, 0)$ ✓ $\theta = 0° \rightarrow A = (0, -20)$

$R = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22'36$ MPa




b) $\theta_p$ y tensiones principales

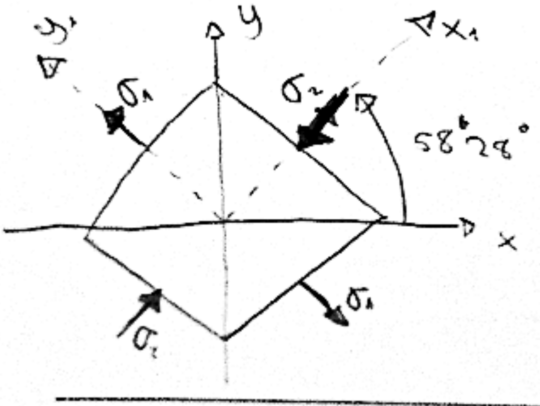
$\sigma_1 = -10 + 22'36 = 12'36$ MPa (C + R ✓

$\sigma_2 = -10 - 22'36 = -32'36$ MPa ✓

$2\theta_{p1} = -63'43° \rightarrow \theta_{p1} = -31'71°$ ✓ $\rightarrow \theta_{p1} = 148'28°$

$2\theta_{p2} = 116'57 \rightarrow \theta_{p2} = 58'28°$ ✓

c)




✓

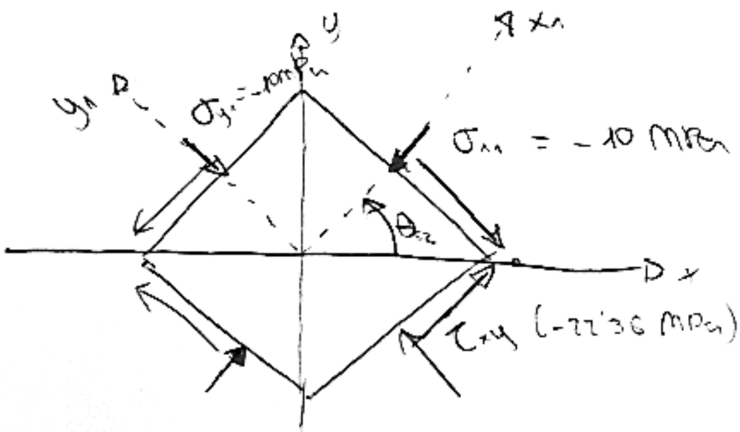
d) $\tau_{max} = \pm R = \pm 22'36$ MPa

$2\theta_{s2} = 90^\circ - 2\theta_{p1} = 90^\circ - a\tan\left(\frac{20}{10}\right) = 26'56^\circ$

$\theta_{s2} = 13'28^\circ$

$\theta_{s1} = 103'28^\circ$

e) $\sigma_{x1} = \sigma_{y1} = -10$ MPa



f) Compresión 40 MPa
tracción 5 MPa

$\sigma_{max} = 12'36$ MPa

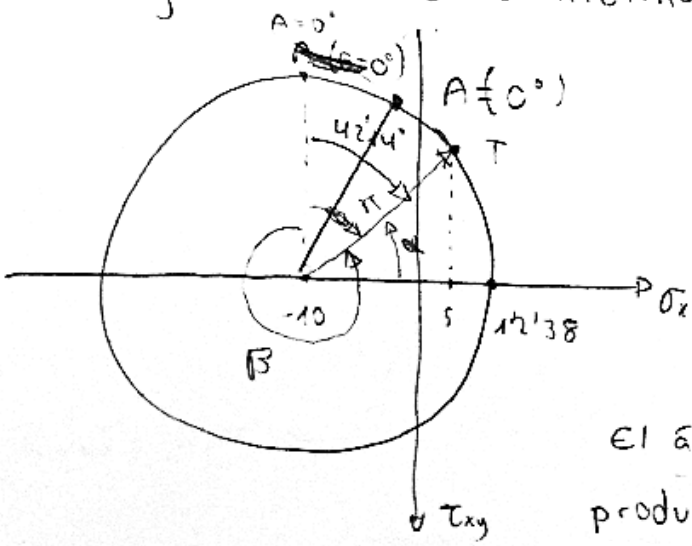
$\sigma_{min} = -32'36$ MPa

* Sí, las tensiones son suficientes para romperlo, al menos en tracción;

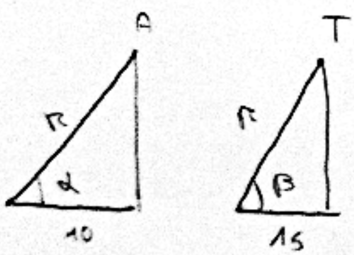
$\sigma_{max} = 12'36 > 5$ MPa ✓

$\sigma_{min} = |-32'36| < 40$ MPa ✗ No

El ángulo mínimo de inclinación se da cuando $\sigma = 5$ MPa




El ángulo mínimo para que se produzca rotura debe ser



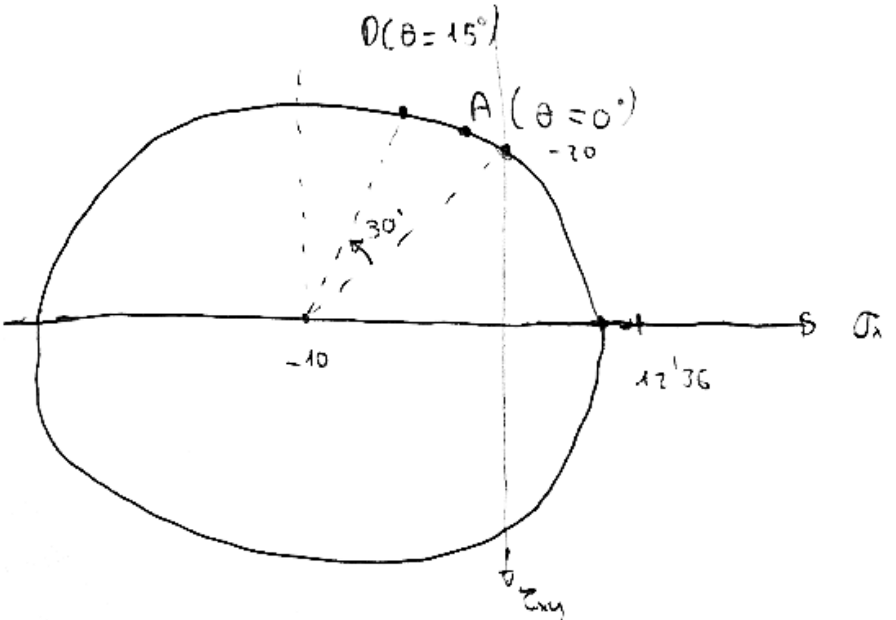

$\alpha = 63'43°$ $\beta = 47'55$

$\theta = \frac{63'43}{2} - \frac{47'86}{2} = 7'785°$ ✓

$\boxed{7'78° \text{ en sentido horario}}$

Centro Universitario
de la Defensa Zaragoza

a)




$$\sigma_{x1}(\theta=15^\circ) = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$\sigma_{x1} = -11'33 \text{ MPa} \checkmark$$

$$\sigma_{y1} = -8'66 \text{ MPa} \checkmark = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\theta) - \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$\tau_{x1y1} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\mathrm{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos(2\theta)$$

$$\tau_{x1y1} = -2'32 \checkmark$$