ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS 23-06-2014

PROBLEMA 1 (1 hora)

Se pide estudiar el flujo estacionario y axilsimétrico de un líquido perfecto de propiedades constantes (densidad ρ, viscosidad μ, conductividad térmica k y calor específico c), inducido por la rotación de un cilindro infinitamente largo de radio R alrededor de su eje con una velocidad angular Ω constante, mientras que por la pared porosa del cilindro se succiona radialmente un caudal de fluido $2\pi R V_w$ por unidad de longitud. La temperatura de la pared del cilindro es uniforme de valor T_w. Lejos del cilindro $(r \to \infty)$ la presión es p_∞ y la temperatura es T_∞, mientras que la circulación, $\Gamma(r) = 2\pi r v_\theta(r)$, toma cierto valor constante $\Gamma_\infty \neq 2\pi R^2 \Omega$.

Tenga en cuenta que las fuerzas másicas pueden despreciarse, que el campo de velocidad se supone de la forma $\bar{v} = v_r(r)\,\bar{e}_r + v_\theta(r)\,\bar{e}_\theta$, mientras que los campos de presión y temperatura son de la forma $p = p(r)$ y $T = T(r)$. Los datos del problema son $(\rho, \mu, k, c, R, \Omega, V_w, T_w, p_\infty, T_\infty, \Gamma_\infty)$.

1. Haga uso de la ecuación de continuidad para obtener la componente radial de velocidad, $v_r(r)$. (*2 puntos*)

2. Escriba los términos no nulos de la ecuación de cantidad de movimento en dirección θ. Para resolver la ecuación diferencial ordinaria (EDO) resultante, conviene sustituir la variable $v_\theta(r)$ por la variable $\Gamma(r) = 2\pi r v_\theta(r)$, e introducir el número de Reynolds del problema, $Re = \rho V_w R/\mu$. Escriba la EDO con condiciones de contorno que determina $\Gamma(r)$. (*2 puntos*)

3. Resuelva la EDO obtenida en el apartado anterior para el caso $Re \neq 2$, sabiendo que admite dos soluciones linealmente independientes de la forma $r^{\lambda_{1,2}}$, con $\lambda_{1,2}$ constantes que se han de determinar. Demuestre que sólo es posible satisfacer la condición de contorno en $r \to \infty$ si $Re > 2$. Suponga que se cumple esta condición en el resto del problema, y obtenga $v_\theta(r)$. (*2 puntos*)

4. Escriba los términos no nulos de la ecuación de cantidad de movimento radial. Determine el campo de presión, $p(r)$, como función de una integral (no se pide evaluarla en el caso general). Proporcione explícitamente $p(r)$ en el límite $Re \to \infty$. En este mismo límite, obtenga una expresión analítica para la presión en la pared, $p_w = p(r = R)$, como función de los parámetros del problema. (*2 puntos*)

5. Determine el campo de temperatura, $T(r)$, mediante integración de la ecuación de la energía. Tenga en cuenta que la disipación viscosa puede despreciarse (proporcione un criterio para ello). (*2 puntos*)

1/2

① $\nabla\cdot\vec{v} = \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}} = 0 \Rightarrow r v_r = -R V_w \Rightarrow \boxed{v_r = -V_w\frac{R}{r}}$ $\quad (v_z = 0,\ \frac{\partial}{\partial\theta} = 0)$

② $\rho v_r \frac{dv_\theta}{dr} + \rho\frac{v_r v_\theta}{r} = \mu\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(r v_\theta)}{dr}\right]$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Gamma}{dr}\right] + Re\,\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d\Gamma}{dr} = 0 \\ r = R:\ \Gamma = 2\pi R^2\Omega \\ r\to\infty:\ \Gamma\to\Gamma_\infty . \end{cases}$$

③ $\Gamma'' + \frac{(Re-1)}{r}\Gamma' = 0 \xrightarrow[Re\neq 2]{\Gamma = r^\lambda} \Gamma = A + B r^{2-Re}$ $\quad \lambda < \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2-Re$

$$\left.\begin{array}{l} r\to\infty:\ \Gamma\to\Gamma_\infty \Rightarrow A = \Gamma_\infty \quad (Re>2) \\ r = R:\ \Gamma = 2\pi R^2\Omega \end{array}\right\}\ B = R^{Re-2}\left(2\pi R^2\Omega - \Gamma_\infty\right)$$

• LUEGO SI $Re\neq 2$ LA SOLUCIÓN ES $\Gamma = \Gamma_\infty + \left(2\pi R^2\Omega - \Gamma_\infty\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{Re-2}$

↳ SI $\boxed{2\pi R^2\Omega = \Gamma_\infty}$, LA SOLUCIÓN ES $\boxed{\Gamma = \Gamma_\infty}$ $\forall\, Re$

↳ SI $2\pi R^2\Omega \neq \Gamma_\infty$, SÓLO HAY SOLUCIÓN ESTACIONARIA SIEMPRE QUE $Re > 2$

• SI $Re = 2$, LA ECUACIÓN ES $\Gamma'' + \frac{\Gamma'}{r} = 0$ CON SOLUCIÓN GENERAL

$\Gamma(r) = A + B\ln r \rightarrow \Gamma(r) = \Gamma_\infty + \left(2\pi R^2\Omega - \Gamma_\infty\right)\frac{\ln r}{\ln R}$

↳ SÓLO HAY SOLUCIÓN ESTACIONARIA SI $2\pi R^2\Omega = \Gamma_\infty$

POR TANTO, SI $Re > 2$ $\quad v_\theta(r) = \frac{\Gamma_\infty}{\ldots} + \left(R\Omega - \frac{\Gamma_\infty}{\ldots}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{Re-2}$

$4\pi^2 r^3 \quad \pi r^{Re} \quad 2\pi^2 r^{Re+1} \quad r^{2Re-3}$

2/2

EN EL LÍMITE $Re \to \infty$, SÓLO CUENTAN LOS DOS PRIMEROS TÉRMINOS:

$$\boxed{\frac{p - p_\infty}{\rho} \simeq -\frac{1}{2}\left(V_w^2 R^2 + \frac{\Gamma_\infty^2}{4\pi^2}\right)\frac{1}{r^2}}$$

EVALUADA EN $r = R$, $\boxed{\frac{p_w - p_\infty}{\rho} \simeq -\frac{1}{2}\left(V_w^2 + \frac{\Gamma_\infty^2}{4\pi^2 R^2}\right)}$

(5) $$\rho c v_r \frac{dT}{dr} = \frac{K}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \overset{\text{DESPRECIABLE}}{\cancel{\phi_v}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + Re\,Pr\,\frac{dT}{dr} = 0 \\ r = R:\ T = T_w \\ r \to \infty:\ T \to T_\infty \end{array}\right.$$

DONDE $Re\,Pr = \frac{\rho c V_w R}{K}$

CUYA SOLUCIÓN ES $\boxed{T(r) = T_\infty + (T_w - T_\infty)\left(\frac{R}{r}\right)^{Re\,Pr}}$

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS 23-06-2014

PROBLEMA 2 (1 hora)

Un depósito cilíndrico hermético de diámetro D y altura $2D$ tiene acoplado en su extremo inferior un conducto circular de longitud D y diámetro $d \ll D$, como se muestra en la figura. Inicialmente, el extremo del tubo se encuentra tapado, y tanto el conducto como la mitad inferior del depósito contienen un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. La mitad superior del depósito contiene un gas ideal a una presión de $5\,p_a/4$, donde p_a es el valor de la presión atmosférica que rodea al sistema. En un instante dado se abre la tapa que cierra el conducto, y el líquido comienza a salir del depósito, de manera que transcurrido un tiempo t genérico el nivel de la superficie libre de líquido en el depósito es $h(t)$, mientras que la presión del gas en el depósito es $p_g(t)$. Sabiendo que la evolución del gas en el depósito es isoterma, se pide:

1. Determine las ecuaciones que permiten obtener los valores de equilibrio de la altura de líquido, h_{eq} y de la presión del gas en el depósito, p_{eq}, una vez que el líquido deja de salir del mismo debido a la expansión del gas. Escriba las ecuaciones en forma adimensional usando las variables $\bar{p}_{eq} = p_{eq}/p_a$ y $\bar{h}_{eq} = h_{eq}/D$, mostrando que la solución depende de un único parámetro $\Lambda = p_a/(\rho\, g\, D)$. Calcule $\bar{p}_{eq}$ y $\bar{h}_{eq}$ cuando $\Lambda = 9$. (*2 puntos*)

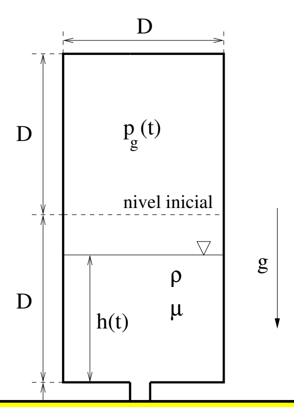
2. A la vista del resultado anterior, obtenga un criterio para que la viscosidad sea dominante en el movimiento del líquido en el conducto durante el proceso de descarga. (*2 puntos*)

3. Determine el caudal Q de salida de líquido en un instante genérico t durante el proceso de descarga, expresándolo en función de la altura $h(t)$. (*2 puntos*)

4. Determine la ecuación diferencial que permite obtener $h(t)$. Escríbala en forma adimensional mediante el uso de las variables $\bar{h} = h/D$ y $\tau = t\,(\rho\, g\, d^4)/(32\mu\, D^3)$, mostrando que Λ es el único parámetro del problema. (*2 puntos*)

5. Para el caso $\Lambda = 9$, determine el tiempo que tarda el nivel de la superficie libre en alcanzar la cota $\bar{h} = 3/4$. (*2 puntos*). Tenga en cuenta que

$$\int \frac{dx}{1 + x + \frac{36x-27}{8-4x}} = \frac{1}{6}\ln(2x-1) + \frac{5}{6}\ln(19-2x) + C$$



Solución

1. La situación de equilibrio se calcula teniendo en cuenta la hidrostática del líquido,

$$p_{eq} = p_a - \rho g(D + h_{eq}) \Rightarrow \bar{p}_{eq} = 1 - \Lambda^{-1}(1 + \bar{h}_{eq}),$$

junto con la evolución isoterma del gas entre los estados inicial y final,

$$\frac{5p_a}{4}\frac{\pi D^3}{4} = p_{eq}\frac{\pi D^2}{4}(2D - h_{eq}) \Rightarrow \bar{p}_{eq} = \frac{5}{4}\frac{1}{2 - \bar{h}_{eq}}.$$

La altura de equilibrio es solución de la ecuación cuadrática,

$$\bar{h}_{eq}^2 - (1 + \Lambda)\bar{h}_{eq} + \frac{3\Lambda}{4} - 2 = 0,$$

cuya solución válida es,

$$\bar{h}_{eq} = \frac{1 + \Lambda - \sqrt{(1 + \Lambda)^2 - 3\Lambda + 8}}{2},$$

y, para el caso $\Lambda = 9$ pedido, se tiene

$$\bar{h}_{eq} = \frac{1}{2}, \;\; \bar{p}_{eq} = \frac{5}{6}.$$

2. La viscosidad será dominante en el movimiento del líquido en el conducto si se cumple que

$$Re\frac{d}{D} \ll 1,$$

donde $Re = \rho\, u_c\, d/\mu$. La velocidad característica del líquido durante el proceso de descarga, u_c, viene dada por el balance entre los términos de presión reducida y viscoso,

$$\rho\, g \sim \mu\, \frac{u_c}{d^2} \Rightarrow u_c \sim \frac{\rho\, g\, d^2}{\mu},$$

de donde se obtiene el criterio

$$\frac{\rho^2\, g\, d^4}{\mu^2\, D} \ll 1$$

para que pueda despreciarse la aceleración convectiva del líquido. Por otra parte, la aceleración local será despreciable si el movimiento es casi-estacionario,

$$\frac{d^2}{\nu\, t_c} \ll 1,$$

donde $\nu = \mu/\rho$ y t_c es el tiempo característico de variación de la altura desde su nivel inicial $h(0) = D$ hasta su valor final h_{eq}, y viene por tanto dado por $t_c \sim V_c/Q_c$ donde $V_c \sim \pi\, D^3/4$ es el orden de magnitud del volumen de líquido que descarga y $Q_c \sim \pi\, d^2\, u_c/4$ es el caudal característico de salida de líquido. Por lo tanto, se obtiene el criterio

$$Re\left(\frac{d}{D}\right)^3 \ll 1$$

que la coordenada x a lo largo del conducto está orientada con la gravedad. Si se integra esta ecuación a lo largo del conducto desde la entrada hasta la salida se obtiene, $D\, P_l = \rho\, g\, D + p_e - p_a$, donde p_e es la presión a la entrada del conducto, que a su vez puede escribirse en función de la presión del gas en la cámara mediante la expresión $p_e = p_g(t) + \rho\, g\, h(t)$, donde se ha despreciado la caída de presión del líquido en la región de aceleración desde el depósito hacia el conducto, lo cual está justificado por la hipótesis de partida, $Re\, d/D \ll 1$ (ver apuntes de teoría). Para cerrar el problema, ha de hacerse uso de la ecuación que describe la expansión isoterma del gas en la cámara, $5p_a/4\, D = p_g(t)(2D - h(t))$. Usando estos resultados, se obtiene finalmente la expresiíon de la presión reducida en términos de la altura de líquido en el depósito,

$$P_l = \rho\, g \left(1 + \bar{h} + \Lambda \frac{4\bar{h} - 3}{8 - 4\bar{h}}\right).$$

4. La evolución de la altura de líquido en el depósito, $h(t)$, se obtiene de escribir la ecuación de conservación de la masa al sistema formado por el depósito y el conducto,

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4} Q,$$

y, sustituyendo por la expresión de Q obtenida en el apartado anterior,

$$-\frac{d\bar{h}}{d\tau} = 1 + \bar{h} + \Lambda \frac{4\bar{h} - 3}{8 - 4\bar{h}},$$

junto con la condición inicial $\bar{h}(0) = 1$, donde se ha hecho uso de la adimensionalización sugerida en el enunciado, y que demuestra que Λ es el único parámetro del problema.

5. La solución se obtiene implícitamente al separar variables en la ecuación anterior y realizar la integral,

$$\tau = \int_h^1 \frac{dx}{1 + x + \frac{36x - 27}{8 - 4x}},$$

donde se ha tenido en cuenta que $\Lambda = 9$. Usando el resultado del enunciado,

$$\tau = \frac{5}{6} \ln(17) - \frac{1}{6} \ln(2h - 1)(19 - 2h)^5,$$

y el tiempo que tarda el nivel en bajar hasta la cota $3/4$ es, por tanto,

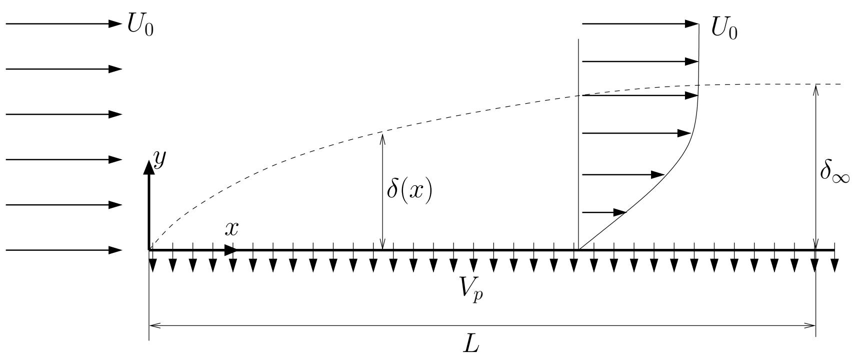
$$\tau_{3/4} = \ln\left(2\left(\frac{17}{35}\right)^{5/6}\right) \simeq 0.09$$

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS **23-06-2014**

PROBLEMA 3 (1 hora)

Se desea evaluar el efecto de la succión en la pared sobre la capa límite que se desarrolla sobre una placa plana orientada con una corriente exterior de densidad ρ y viscosidad μ constantes, que se mueve con velocidad uniforme $U_0\,\bar{e}_x$. Como muestra el esquema adjunto, la succión se aplica de manera uniforme a lo largo de toda la placa desde el borde de ataque, $x = 0$, con una velocidad $-V_p\,\bar{e}_y$, siendo $0 < V_p \ll U_0$ la velocidad de succión. La presencia de una succión uniforme implica que a una distancia suficientemente grande del borde de ataque se alcanzan condiciones de flujo desarrollado, $\partial/\partial x = 0$. En dicha región lejana, el espesor de la capa límite tiende a un valor constante δ_∞ (*capa límite asintótica de succión*), y la corriente viene determinada por una solución analítica que satisface las ecuaciones de Navier-Stokes.



1. Mediante estimaciones apropiadas, determine los órdenes de magnitud del espesor δ_∞ y de la longitud característica L de adaptación de la capa límite a las condiciones desarrolladas. En particular, demuestre que la condición $V_p \ll U_0$ es necesaria y suficiente para que se cumpla que $\delta_\infty \ll L$, garantizando la validez de la aproximación de capa límite en la descripción de la región de adaptación. (*1.5 puntos*)

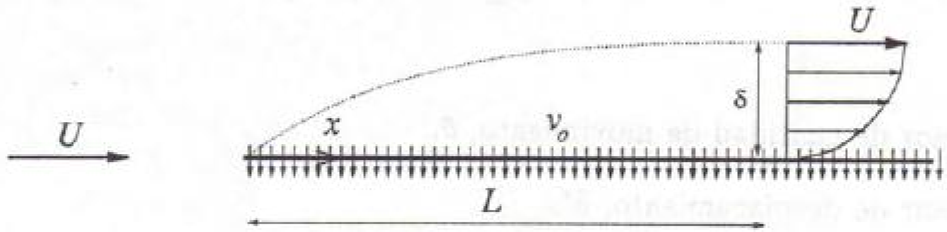
2. Obtenga la solución desarrollada que aparece para $x \gg L$ determinando, en particular, el perfil de velocidad $u_\infty(y)$, los espesores de desplazamiento, δ^*_∞, y de cantidad de movimiento, θ_∞, y el esfuerzo de fricción en la pared, $\tau_{p,\infty}$. (*1.5 puntos*)

3. Estudie la región de desarrollo, $0 < x \lesssim L$. Para ello, haga uso del método de Kármán-Pohlhausen, suponiendo un perfil de velocidad de la forma

$$\frac{u}{U_0} = 1 - \exp\left[-\frac{y}{\delta(x)}\right].$$

   Obtenga los valores de δ^*, θ y τ_p como funciones de δ. (*1 punto*)

4. Sustituya los resultados del apartado anterior en la ecuación integral de von Kármán para obtener la ecuación diferencial ordinaria (EDO) que gobierna la evolución de $\delta(x)$. Tenga en cuenta que V_p es un número positivo, lo que significa que el término de soplado/succión en la ecuación de von Kármán se escribe $-U_0 V_p$. Demuestre que en el límite $x \to \infty$, para el cual $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}x \to 0$, la solución



ASUMIENDO QUE LA APROXIMACIÓN DE CAPA LÍMITE VALE $(\delta \ll L)$ LAS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN LA CAPA LÍMITE SE REDUCEN A

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ $\rightarrow$ SÓLO INDICA QUE $\Delta v \sim \dfrac{\delta}{x} U$ $\quad (x \gg 1, \ \Delta v \simeq 0)$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{\,0} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{U^2}{L} \qquad V_o\frac{U}{\delta} \qquad \nu\frac{U}{\delta^2}$$

$\rightarrow$ SI $x \gg L$ LA CONVECCIÓN TRANSVERSAL COMPENSA A LA DIFUSIÓN $\boxed{\delta \sim \nu/V_o}$

$\rightarrow$ SI $x \sim \boxed{L \sim \dfrac{U\nu}{V_o^2}}$ EL TÉRMINO DE CONVECCIÓN LONGITUDINAL ES TAN IMPORTANTE COMO LOS OTROS. SI $x \gg L$, ESTE TÉRMINO DESAPARECE Y LA CAPA LÍMITE ALCANZA UNA SOLUCIÓN INDEPENDIENTE DE x

SI $V_o \sim U$ $\nearrow$ N-S

$\rightarrow$ SI $x \ll L$, $u\dfrac{\partial u}{\partial x} \simeq \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\rightarrow$ $\delta \sim \left(\dfrac{x\nu}{U}\right)^{1/2}$ $\rightarrow$ ESTO PARECE MÁS A LA CAPA LÍMITE DE BLASIS

$\rightarrow$ EN REALIDAD EL TÉRMINO $v\dfrac{\partial u}{\partial y}$ TB ENTRARÍA PQ $\Delta v \sim \dfrac{\delta}{x}U \gg V_o$

NÓTESE QUE LA CONDICIÓN $V_o \ll U$ GARANTIZA LA VALIDEZ DE LA APROXIMACIÓN DE CAPA LÍMITE.

2) LAS COSAS DEJAN DE DEPENDER DE x. CONTINUIDAD INDICA QUE $V = -V_o$ Y LA INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOMENTO DA

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{-\frac{y}{\nu/V_o}}, \quad \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \frac{\nu}{V_o}, \quad \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \frac{1}{2}\frac{\nu}{V_o}, \quad \tau_o = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\frac{V_o}{\nu}U$$

3) $H = \dfrac{\delta^*}{\theta} = 2$, $\quad T = \dfrac{\tau_o}{\mu}\dfrac{\theta}{U} = \dfrac{1}{2}$

$$U\frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^2}{\nu}\right) = 2T - 2V_o\frac{\theta}{\nu} \qquad x = 0, \ \theta = 0$$

INTRODUCIENDO $\theta/\nu_{N_o} = \bar{\theta}$ Y $\bar{x} = \ x$

$0.7071\sqrt{\dfrac{Ux}{\nu}}$