SOLUCIONES POSIBLES para las cuestiones de la Primera Parte

1) Los términos monopolar y dipolar se anulan porque

$$A = \sum_{i=1}^{n} q_i = q - 2q + q = 0 \qquad B = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u_r} = (q\boldsymbol{\ell} - q\boldsymbol{\ell}) \cdot \boldsymbol{u_r} = 0$$

El primer término no nulo es el cuadripolar, cuyo numerador es

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \ell_i^2}{2}(3\cos^2\theta_i - 1) = \frac{1}{2}q\ell^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}q\ell^2(3\cos^2\theta - 1) = q\ell^2(3\cos^2\theta - 1)$$

pues si $q(0,0,\ell)$ es la carga q_1 y $q(0,0,-\ell)$ la carga q_3, se verifica que $\theta_1 + \theta_3 = \pi$, por lo que $\cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_3 = \cos^2\theta$.

Por consiguiente, el potencial se expresa mediante

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q\ell^2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots$$

---

2) La densidad de energía es nula en el interior del conductor ($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$)

$$u_e = 0 \qquad (r < R)$$

En el exterior es

$$u_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \qquad (r > R)$$

La energía del conductor es

$$U_e = \iiint_{\Re^3} u_e \, d\mathcal{V} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

A partir de la carga y potencial del conductor

$$U_e = \frac{1}{2}QV^* = \frac{1}{2}Q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

que coincide con la obtenida a partir de u_e.

---

3) A partir de la energía $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2x}V^2$ se obtiene la fuerza atractiva que es

$$F = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{V=\text{cte}} \quad \text{resulta} \quad F_x = -\frac{\varepsilon_0 S}{2e^2}V^2$$

Esta fuerza se puede expresar, también, en función de la carga del condensador que permanece constante durante el desplazamiento (no así la diferencia de potencial entre placas). El resultado es

$$F_x = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

El trabajo realizado es

$$\mathcal{T} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\frac{e}{2} = \frac{1}{4}CV^2 = \frac{\varepsilon_0 S}{4e}V^2$$

Este trabajo procede de la energía del sistema que se reduce hasta el valor

$$U_{\text{final}} = \frac{Q^2}{2C_{\text{final}}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\frac{e}{2} = \frac{1}{4}CV^2$$

de forma que

$$\mathcal{T} = U_{\text{inicial}} - U_{\text{final}} = \frac{1}{2}CV^2 - \frac{1}{4}CV^2 = \frac{1}{4}CV^2$$

---

4) Hay que comprobar las condiciones de contorno:

$$(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{k} = \sigma = 0\,;\ \text{se cumple pues } (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0$$

$$(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1)\times\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)\times\boldsymbol{k}\,;\ \text{se cumple pues } \boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1 = 4\boldsymbol{j} = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1$$

Además, como $\sigma = 0$, $\sigma_{\text{p}1} = \boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{k} = 0$ y $\sigma_{\text{p}2} = \boldsymbol{P}_2\cdot(-\boldsymbol{k}) = 0$, debe ser

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{k} = \frac{1}{\varepsilon_o}(\sigma + \sigma_{\text{p}1} + \sigma_{\text{p}2}) = 0$$

y

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

cumpliéndose ambas al ser

$$\varepsilon_o\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{P}_1 = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

$$\varepsilon_o\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{P}_2 = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

es decir, $\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{0}$.

Por tanto, son posibles los valores dados.

---

5) Para que la superficie esférica de radio R_2 se sitúe a potencial cero, se coloca una carga $q' = -\dfrac{R_2}{a}q$ a distancia del centro de la esfera $a' = \dfrac{R_2^2}{a}$.

Para llevar el potencial a V^* se añade una carga distribuida homogéneamente sobre una superficie esférica de radio $R'' > R_2$ de valor $Q'' = 4\pi\varepsilon_0 R'' V^*$. Esta distribución eleva el potencial en el valor constante V^* en todos los puntos del interior de la cavidad de radio R_2, con una contribución nula al campo eléctrico dentro de la misma. Por consiguiente, la fuerza sobre q es la debida a q', exclusivamente, y su valor es

$$F_q = -\frac{q^2 a R_2}{4\pi\varepsilon_0(R_2^2 - a^2)^2}$$

indicando el signo menos que la fuerza sobre q se dirige hacia la carga imagen, q'.
