Hoja nº ......

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura: ANALISIS II Grupo: 516

Apellidos: ...... Nombre: ......

Ejercicio del día: 17-05-2012

1.) Consideramos la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3+4y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

ii) ¿Es $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continua en $(0,0)$?

2.) Consideremos el campo vectorial constante $F(x,y,z) = (1,2,-1)$ en $\mathbb{R}^3$

i) Hallar un campo escalar f en $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla f = F$ y $f(0,0,0) = 0$.

ii) En la esfera S de centro $(0,0,0)$ y radio 2 hallar los puntos donde f alcanza el máximo y el mínimo y calcular los correspondientes valores.

3.) Sea Γ la curva de intersección del plano $z = ax + by$ con el cilindro $x^2+y^2=1$. Hallar todos los valores reales a y b tales que $a^2+b^2=1$. y

$$\int_\Gamma y\,dx + (z-x)\,dy - y\,dz = 0$$

4.) Sea S la superficie $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1,\ 0 < z < \sqrt{3}/2\}$

i) Calcular el área de S.

ii) Calcular $\int_S F \cdot dS$, tomando la normal exterior, para $F(x,y,z) = (y, -x, z)$.

5.) Sea P el paraboloide de ~~revolución~~ ecuación: $z = x^2+y^2$ y E la esfera de ecuación: $x^2+y^2+z^2=1$. Denotemos por S_1 la porción del paraboloide P que se encuentra dentro de la esfera E y por S_2 la porción de la esfera E que se encuentra dentro del paraboloide P. Calcular para $S = S_1 \cup S_2$, orientada con la normal exterior, la integral de superficie.

$$\int_S F \cdot dS \qquad \text{para} \quad F(x,y,z) = (x^3, -y^3, 3z(y^2-x^2)+z^2)$$

1. i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3+4y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^3+4\cdot 0}{h^2+0}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h^3}{h^3} = \underline{\underline{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{3\cdot 0+4\cdot k^3}{0+k^2}\cdot\frac{1}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{4k^3}{k^3} = \underline{\underline{4}}$$

diferenciable si: $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{3h^3+4k^3}{h^2+k^2} - 0 - 3\cdot h - 4\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \iff$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3h^3+4k^3-3h(h^2+k^2)-4k(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-3hk^2-4kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$$

pero si nos acercamos por la recta: $k = m\cdot h$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{-3m^2h^3-4mh^3}{(1+m^2)^{3/2}\cdot h^3} = \frac{-3m^2-4m}{(1+m^2)^{3/2}}$$, que no es 0 para todo valor de m.

$\Downarrow$

<u>$f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$</u>

ii) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{9x^2(x^2+y^2)-(3x^3+4y^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{9x^4+9x^2y^2-6x^4-8xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$ si $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0+h,0+k)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$ apartado i).

para hacer el límite, si nos acercamos por la recta $k = mh$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{9h^4+9m^2h^4-6h^4-8m^3h^4}{(1+m^2)^2h^4} = \frac{3-9m^2-8m^3}{(1+m^2)^2}$$, que no es 3 para todo m

$\Downarrow$

<u>$\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$</u>

2 . i) $F = (1, 2, -1)$ $\quad \nabla f = F \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -1 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \rightarrow df = dx \rightarrow \int df = \int dx \rightarrow \underline{f = x + \varphi(x,y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \rightarrow df = 2dy \rightarrow \int df = 2\int dy \rightarrow \underline{f = 2y + \varphi(x,z)} \quad \Rightarrow f = x + 2y - z + C_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -1 \rightarrow df = -dy \rightarrow \int df = -\int dy \rightarrow \underline{f = -z + \varphi(x,y)}$$

$$f(0,0,0) = 0 \Leftrightarrow 0 + 2\cdot 0 - 0 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \underline{f = x + 2y - z}$$

ii) el gradiente de f marcará la máxima variación en el valor de f. por tanto, si seguimos la dirección del gradiente hasta cortar la esfera encontraremos los puntos de máximo y mínimo valor de f.

para asegurar que nos movemos en la dirección del gradiente lo máximo posible tenemos que hacerlo pasar por el centro de la esfera, por el (0,0,0)

$$\nabla f = F = (1, 2, -1)$$

definimos un punto $\vec{P}$ en la recta que parte del (0,0,0) con la dirección del gradiente como: $P = (0,0,0) + \lambda(1,2,-1) = (\lambda, 2\lambda, -\lambda)$

intersección de P con la esfera:

esfera: $x^2+y^2+z^2 = 2^2 = 4 \rightarrow (\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 = 4 \rightarrow 6\lambda^2 = 4 \rightarrow |\lambda| = \sqrt{\frac{4}{6}}$

$$\lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{6}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \text{hay que estudiar estos valores de } \lambda$$

$$\underline{\lambda = +\sqrt{\frac{2}{3}}} \rightarrow \underline{P_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} ; \quad f(P_1) = \sqrt{\frac{2}{3}} + 2\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\underline{\lambda = -\sqrt{\frac{2}{3}}} \rightarrow \underline{P_2 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} ; \quad f(P_2) = -\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \left(+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{2}{3}}$$

comparando los resultados : $\underline{P_1 \text{ es un punto de máximo}}$ y

$\underline{P_2 \text{ es un punto de mínimo.}}$

2. ii) método alternativo, multiplicadores de Lagrange.

Sea $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$ y $H(x,y,z) = f(x,y,z) - \mu \cdot g(x,y,z)$

$\uparrow$ esfera de radio 2 $\qquad$ $f(x,y,z) = x+2y-z$

puntos a estudiar:
$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}=0 \rightarrow 1-\mu \cdot 2x=0 \rightarrow \mu = 1/2x \rightarrow x = 1/2\mu \\ \frac{\partial H}{\partial y}=0 \rightarrow 2-\mu\cdot 2y=0 \rightarrow y = 1/\mu \\ \frac{\partial H}{\partial z}=0 \rightarrow -1-\mu \cdot 2z=0 \rightarrow z=-1/2\mu \\ g=0 \rightarrow x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2\mu}\right)^2+\left(\frac{1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{-1}{2\mu}\right)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{6}{4}\right)=4 \Leftrightarrow \mu^2=\frac{6}{16} \Leftrightarrow \underline{\mu=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}} \rightarrow \text{valores de } \mu \text{ a estudiar}$$

$$\underline{\mu=+\frac{\sqrt6}{4}} \rightarrow x=\sqrt{\frac{2}{3}},\ y=2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}},\ z=-\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \underline{f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}} \rightarrow \text{máximo}$$

$$\underline{\mu=-\frac{\sqrt6}{4}} \rightarrow x=-\sqrt{\frac{2}{3}},\ y=-2\sqrt{\frac{2}{3}},\ z=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \underline{f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-6\sqrt{\frac{2}{3}}} \rightarrow \text{mínimo}$$

3. Se trata de una integral de camino difícil, intentamos aplicar el teorema de Stokes:

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\, d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F}\, d\vec{l}$$

$$\int y\,dx + (z-x)\,dy - y\,dz = 0 \Rightarrow \vec{F} = (y, z-x, -y)$$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z-x & -y \end{vmatrix} = (-2, 0, -2)$$

normal al plano de intersección

$$\int y\,dx + (z-y)\,dy - y\,dz = \int (-2,0,-2)\cdot d\vec{S} = \int (-2,0,-2)\cdot\vec{n}\,dS = I$$

$\vec{n} = (a, b, -1)$, para que sea unitaria: $\vec{n} = \frac{(a,b,-1)}{a^2+b^2+1}$

$$I = \int (-2,0,-2)\cdot\frac{(a,b,-1)}{a^2+b^2+1}\,dS = \frac{-2(a-1)}{a^2+b^2+1}\underbrace{\int dS}_{\text{área de la intersección } \neq 0 \,!!} = 0 \Leftrightarrow a-1=0 \Leftrightarrow \underline{a=1}$$

si $a=1 \Rightarrow a^2+b^2=1 \Leftrightarrow 1+b^2=1 \Leftrightarrow b=0 \rightarrow \underline{a=1 \text{ y } b=0}$

4. i) $x^2+y^2+z^2=1 \rightarrow$ esfera de radio 1

$0 < z < \sqrt{3}/2$

antes de pasar a coordenadas esféricas:

$z = \rho\cdot\cos\varphi = \cos\varphi$; $z=0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2$ y $z=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$; $\rho = 1$

$$S = \iint dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \overset{1}{\rho^2}\cdot \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta = 2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = 2\pi(-\cos\varphi)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi\left(-\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{0} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\pi\sqrt{3} = S}$$

ii) para hallar la normal definimos un punto dentro de la superficie:

$\vec{p} = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$; $\vec{u} = \frac{d\vec{p}}{dx} = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$; $\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dy} = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$

$\vec{dS} = \vec{u}\times\vec{v} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right) \rightarrow$ normal exterior: $\vec{dS}(0,0,1) = (0,0,1) \Rightarrow$ apunta hacia afuera

$\vec{F} = (y, -x, z) = (y, -x, \sqrt{1-x^2-y^2}) \Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{dS} = \sqrt{1-x^2-y^2}$

jacobiano de las cilíndricas

$$\int \vec{F}\,\vec{dS} = \iint \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{1} r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta = *$$

$$= 2\pi\int_{1/2}^{1} r\sqrt{1-r^2}\,dr = -\pi\int_{1/2}^{1} -2r\sqrt{1-r^2}\,dr = -\pi\left(\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = -\frac{2\pi}{3}\left[\underbrace{(1-1)^{3/2}}_{0} - \left(1-\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{4\sqrt{4}} = \pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \int\vec{F}\,\vec{dS}$$

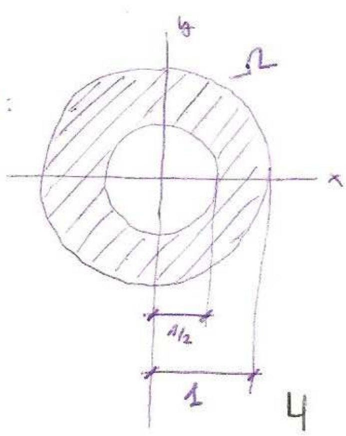
* la razón de este recinto es:

$$\begin{cases} x = r\operatorname{sen}\theta \\ y = r\cos\theta \\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases} \rightarrow z = \sqrt{1-r^2} \Rightarrow 1-r^2 = z^2 \Rightarrow r^2 = 1-z^2 \rightarrow r = \sqrt{1-z^2}$$

si $z = 0 \rightarrow \underline{r = 1}$

si $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow r = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \underline{\frac{1}{2}} = r$

el recinto es:



5. como la integral de flujo es difícil en este caso, vamos a resolverla a partir del teorema de la divergencia:

$$\int \vec{F}\, d\vec{S} = \int \operatorname{div}\vec{F} \cdot dV \to \text{diferencial de volumen}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^3, -y^3, 3z(y^2-x^2)+z^2) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = 3x^2 - 3y^2 + 3y^2 - 3x^2 + 2z = 2z$$

$$\int \vec{F}\, d\vec{S} = \int 2z \cdot dV = \iiint 2z \cdot dx\, dy\, dz$$

antes de pasar a cilíndricas hallamos el corte entre las superficies:

$$\begin{cases} \text{esfera: } x^2+y^2+z^2=1 \\ \text{paraboloide: } z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 + z = 1 \Leftrightarrow z^2+z-1=0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

z_0 tiene que ser positivo porque $z = x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow \underline{z_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

paraboloide: $z = x^2+y^2 = r^2 \to \underline{r_0 = \sqrt{z_0} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

$$\iiint 2z\, dx\, dy\, dz \xrightarrow{\text{cilíndricas}} \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} 2z \cdot r \; dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{r_0}\int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} 2z \cdot r\, dz\, dr =$$

$\sqrt{1-r^2} \to$ esfera: $r^2+z^2=1$

$r^2 \to$ paraboloide: $z=r^2$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{r_0} r \cdot z^2 \Big|_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi \int_0^{r_0} r(1-r^2-r^4)\, dr = 2\pi\int_0^{r_0} (r - r^3 - r^5)\, dr =$$

$$= 2\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^{r_0} = 2\pi\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{4} - \frac{r_0^6}{6}\right) = \pi \cdot r_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{3}\right) =$$

$$= \pi \cdot z_0\left(1 - \frac{z_0}{2} - \frac{z_0^2}{3}\right) = \int \vec{F}\, d\vec{S} \quad ; \quad z_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$r_0^2 = z_0$