DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Dobles Grados de Matemáticas y Física y Matemáticas e Informática.
Analisis de Variable Real. Curso 12–13.
Examen Final. 26 de Junio de 2013

• La duración del examen será de 2 horas por cada parte
• Los alumnos que presenten toda la asignatura deberán obtener una nota mínima de 4 puntos en cada una de las partes.

PRIMER PARCIAL

1 (2,5 puntos) *i) Sea* A *un subconjunto infinito de* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Probar que* A *tiene algun punto de acumulación en* $[a, b]$.
ii) Si $\{x_n\}_n$ *es una sucesión en* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *demuestra que existe alguna subsucesión convergente en* $[a, b]$.

2 (2,5 puntos) *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que para toda sucesión convergente* $x_n \to x_0$ *se tiene que* $f(x_n) \to f(x_0)$.
i) Sea $C \subset \mathbb{R}$ *un conjunto no vacio y cerrado. Probar que* $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in C\}$ *es cerrado.*
ii) Sea $A \subset \mathbb{R}$ *un conjunto no vacio y abierto. Probar que* $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in A\}$ *es abierto.*

3 (3 puntos) *Sean* a_n, b_n *numeros positivos tales que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. *Probar que*
i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\alpha}{c}$
ii) Si $\sum a_n$ *converge entonces* $\sum b_n$ *tambien.*
iii) Si $\sum a_n$ *converge entonces* $\sum a_n^p$ *con* $p \geq 1$ *tambien. ¿Y si* $0 < p < 1$*?.*
iv) Comparar los radios de convergencia de las series de potencias $\sum a_n x^n$ *y* $\sum b_n x^n$.

4 (2 puntos) *Estudia para que* $x \in \mathbb{R}$ *converge la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (1 + \frac{a}{n})^{-n^2} (1 + x^2)^n$, *donde* $a \in \mathbb{R}$ *es un parámetro.*

SEGUNDO PARCIAL

5 (3 puntos) *i) Demuestra que toda función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua es integrable Riemann*
ii) Demuestra que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua excepto en un numero finito de puntos, entonces es integrable Riemann*
iii) Enuncia los Teoremas de Bolzano, Role y del Valor Medio.

6 (2 puntos) *i) Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$. *Probar que* f *alcanza un máximo absoluto en* $\mathbb{R}$.
ii) Encuentra el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un disco de radio R.

7 (2 puntos) *Sea* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$
i) Probar que si f *es monótona decreciente entonces para todos* $0 < s < t < \infty$ *se tiene*

$$\frac{1}{t - s} \int_s^t f(r)\, dr \leq f(s)$$

ii) Reciprocamente, si $f \in C^1(0, \infty)$ *y verifica la condicion integral del apartado i), probar que* f *es monótona decreciente.*

8 (3 puntos) *i) Estudia la convergencia de* $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^a |\ln(t)|^b}\, dt$ *con* $a, b \geq 0$.
ii) Encuentra justificadamente un desarrollo en serie de potencias de x *de la función* $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-s^2}\, ds$, $x \in \mathbb{R}$.