ELECTROMAGNETISMO Septiembre 2010- Original

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1. Expresar las condiciones de contorno que se verifican en la frontera entre dos medios dieléctricos. a) Si uno de los medios tiene una conductividad finita no nula ¿A qué nueva condición de contorno da lugar el flujo de carga que atraviesa la frontera? b) ¿Qué condiciones de contorno se tienen que satisfacer si uno de los medios es un conductor perfecto?

2. Describa el movimiento de una carga con velocidad uniforme v en el seno de un campo magnético uniforme ¿Qué es la frecuencia de ciclotrón?¿Qué leyes de conservación se verifican? (no se precisa deducción matemática).

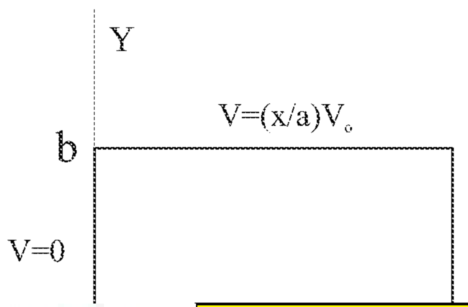
3. Analice los campos de radiación (zona de Fraunhofer) y las consecuencias que se derivan de la dependencia del potencial vector del factor e^{-jkr}/r.

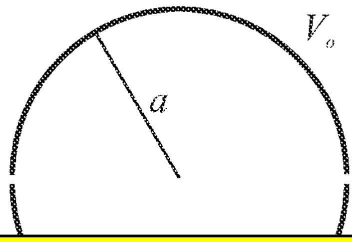
PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1: Determinar el potencial electrostático dentro de un conductor rectangular de dimensiones $a \times b$, e indefinido en la dirección z , con las siguientes condiciones:

$$V(0,y) = 0 \quad ; \quad V(a,y) = 0 \quad ; \quad V(x,0) = \frac{x}{a}V_o \quad ; \quad V(x,b) = 0$$

PROBLEMA 2: Considere un conductor cilindrico muy largo de radio a cuya sección se muestra en la Figura 2. La mitad superior de la superficie se encuenta a potencial V_o mientras que la mitad superior se encuenta a potencial $-V_o$. Encontrar el potencial tanto dentro como fuera del cilindro.





FORMULARIO

(1) **Operaciones diferenciales vectoriales**

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \qquad ; \qquad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{\partial U}{\rho\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{\partial U}{r\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad ; \qquad \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi$$

Rotacional

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,A_z \end{vmatrix}$$

(2) **Ecuación de los potenciales**

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}$$

(3) **Desarrollo de Fourier**

$$F(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\pi x/L\right) + b_n\,\mathrm{sen}\left(n\pi x/L\right)\right)$$

$$a_n = 1/L\int_{-L}^{L}F(x)\cos\left(n\pi x/L\right)dx$$

$$b_n = 1/L\int_{-L}^{L}F(x)\,\mathrm{sen}\left(n\pi x/L\right)dx$$

(4) **Ecuación de Laplace en c. cartesianas**

$$\triangle\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad ; \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$k_x^2 > 0 \qquad X = A_1\exp(k_x x) + A_2\exp(-k_x x) = A_3\sinh(k_x x) + A_4\cosh(k_x x)$

$k_x^2 < 0 \qquad X = A_1\exp(i|k_x|x) + A_2\exp(-i|k_x|x) = A_3\,\mathrm{sen}(|k_x|x) + A_4\cos(|k_x|x)$

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\phi = \left(C_1 r^n + C_2 r^{-n}\right)\left(A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{sen} n\varphi\right)$$

o bien , si $n = 0$

$$\phi = (k_1 \ln r + k_2\ )\,(A_1\varphi + B_2)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = (B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr))\,(A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz)$$

ó

$$\phi = (C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr))\,(D_1 \cos kz + D_2 \operatorname{sen} kz)$$

(6) **Ecuación de Laplace en c. esféricas**

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = \left(B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)$$

— —

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \qquad ; \qquad K_o(x) = N_o(jx)$$

Polinominos de Legendre

$$P_m(\cos\theta) = \frac{1}{2^m m!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^m \left(\cos^2\theta - 1\right)^m$$

$$P_o(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$