ELECTROMAGNETISMO Septiembre 2010- Reserva

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1. Defina los siguientes conceptos: velocidad de fase, índice de refracción de un medio, vector de propagación complejo e impedancia característica de un medio.

2. ¿Qué son los potenciales de Liénard-Wiechert? A partir de que caso general se deducen? (No se requiere la deducción)

3. Describa las causas que provocan la pérdida de energía de una onda electromagnética que se propaga en un medio ¿Mediante qué parámetro o parámetros se tienen en cuenta los fenómenos disipativos en un medio material?

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1: Determine el potencial en el interior de una esfera de radio a sabiendo que en la superficie de la misma se verifica

$$V(a, \theta) = 3V_o \cos^2 \theta + 3V_o \cos \theta + V_o$$

PROBLEMA 2: Determinar el potencial electrostático dentro de un conductor rectangular de dimensiones $a \times b$, e indefinido en la dirección z , con las siguientes condiciones:

$$V(-\frac{a}{2}, y) = 0; \qquad V(\frac{a}{2}, y) = 0; \qquad V(x, -\frac{b}{2}) = 0; \qquad V(x, \frac{b}{2}) = V_o$$

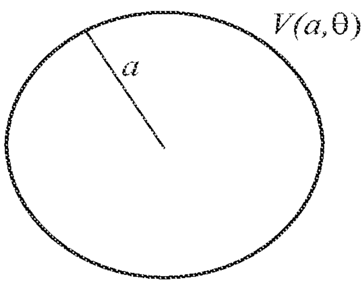

Figura 1

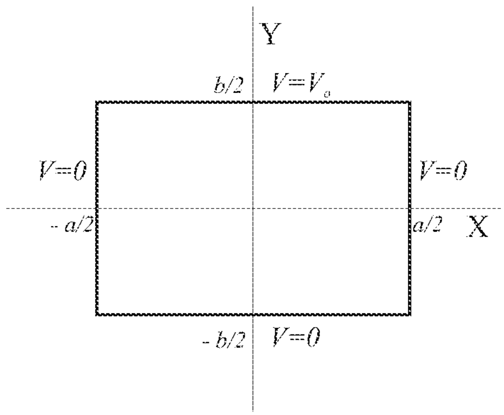

Figura 2

FORMULARIO

(1) **Operaciones diferenciales vectoriales**

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{\partial U}{\rho \partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{\partial U}{r \partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r \operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & (r \operatorname{sen}\theta)\,A_z \end{vmatrix}$$

(2) **Ecuación de los potenciales**

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A}$$

(3) **Desarrollo de Fourier**

$$F(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(n\pi x/L\right) + b_n \operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)\right)$$

$$a_n = 1/L \int_{-L}^{L} F(x)\cos\left(n\pi x/L\right)dx$$

$$b_n = 1/L \int_{-L}^{L} F(x)\operatorname{sen}\left(n\pi x/L\right)dx$$

(4) **Ecuación de Laplace en c. cartesianas**

$$\triangle\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$k_x^2 > 0 \qquad X = A_1 \exp(k_x x) + A_2 \exp(-k_x x) = A_3 \sinh(k_x x) + A_4 \cosh(k_x x)$

$k_x^2 < 0 \qquad X = A_1 \exp(j\,|k_x|\,x) + A_2 \exp(-j\,|k_x|\,x) = A_3 \operatorname{sen}(|k_x|\,x) + A_4 \cos(|k_x|\,x)$

$k_x^2 = 0 \qquad X = A_1 x + A_2$

Soluciones análogas para Y, Z

(5) **Ecuación de Laplace en c. cilíndricas**

$$\triangle\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

(a) Simetría axial con invarianza longitudinal

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\phi = \left(C_1 r^n + C_2 r^{-n}\right)\left(A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{sen} n\varphi\right)$$

o bien , si $n = 0$

$$\phi = (k_1 \ln r + k_2\ )\,(A_1 \varphi + B_2)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = \left(B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)\right)\left(A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz\right)$$

ó

$$\phi = \left(C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)\right)\left(D_1 \cos kz + D_2 \operatorname{sen} kz\right)$$

(6) **Ecuación de Laplace en c. esféricas**

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = \left(B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)$$

— —

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \qquad ; \qquad K_o(x) = N_o(jx)$$

Polinominos de Legendre

$$P_m(\cos\theta) = \frac{1}{2^m m!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^m \left(\cos^2\theta - 1\right)^m$$

$$\begin{aligned} P_o(\cos\theta) &= 1 \\ P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\ P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\ P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \end{aligned}$$

ELECTROMAGNETISMO (Física Industrial) 2ª PP. Septiembre 2010- Reserva

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (6ptos) y Problemas (4ptos). Para aprobar será necesario, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 2ptos en la de Problemas. **MATERIAL**: Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1. Defina la directividad de una antena. Discuta cuál es la directividad apropiada para: a) la antena de radio de un automovil y b) un radiotelescopio

2. Analice el modo fundamental en una guía rectangular. ¿Qué relación debe existir entre las dimensiones de la guía para que el rango de frecuencias de operación del modo fundamental sea el máximo posible?

3. Describa qué método puede emplearse para determinar permitividades eléctricas de materiales con una cavidad resonante.

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1: En una guía de ondas rectangular con dieléctrio aire y dimensión mayor $a = 2,29$ cm se propaga el modo TM de orden más bajo, cuya frecuencia de corte de 16,1 GHz.

a) Halle para dicho modo los valores de la constante de propagación β, la longitud de onda en la guía λ_g, la velocidad de fase v_f, y la impedancia de onda intrínseca Z_{TM}, cuando la guía opera a una frecuencia doble de la frecuencia de corte.

b) Para una frecuencia igual a la mitad de la frecuencia de corte anterior, indique los modos presentes en la guía.

PROBLEMA 2: Dos antenas isótropas idénticas situadas sobre un mismo meridiano a una distancia $d = \lambda/2$ emiten con una longitud de onda λ y un desfase δ. Se realizan medidas de intensidad a una cierta distancia fija mucho mayor que λ. Los observadores situados en las direcciones de los cuatro puntos cardinales perciben las señales con igual intensidad y se detecta un máximo de intensidad en la direccion 60^odel norte hacia el oeste.

a) Determine con estos datos la diferencia de fase con que emite una antena con respecto a la otra.

b) Dibuje con precisión razonable y señalando los valores numéricos necesarios el diagrama completo de la intensidad de la radiación.

FORMULARIO

1.- Sistemas de transmisión con simetría traslacional

$$E_t = \frac{1}{k^2-\beta^2}\left(j\omega\mu\vec{u}_z \times \nabla_t H_z \mp j\beta\nabla_t E_z\right) \qquad H_t = \frac{1}{k^2-\beta^2}\left(-j\omega\varepsilon\vec{u}_z \times \nabla_t E_z \mp j\beta\nabla_t H_z\right)$$

2.- Líneas de transmisión

$$Z_N = \frac{Z_{LN} + j\tan(\beta l)}{1 + jZ_{LN}\tan(\beta l)} \qquad v(l) = a_o^+ e^{j\beta l}(1+\rho) \qquad I(l) = \frac{1}{2Z_o} a_o^+ e^{j\beta l}(1-\rho)$$

3.- Guias rectangulares

Modos TE — **Modos TM**

$$H_{zmn} = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad E_{zmn} = B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{xmn} = \left(j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad E_{xmn} = \left(-j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)B_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{ymn} = \left(j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad E_{ymn} = \left(-j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{xmn} = \left(j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad H_{xmn} = \left(j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{ymn} = \left(-j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad H_{ymn} = \left(-j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)B_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{S_t}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{S_t}\left(\vec{E}_t\times\vec{H}_t^*\right)\cdot d\vec{s}\right]$$

$$[Q]_{101} = \frac{\mu}{\mu_o\delta_p}\frac{\ln\left[ab\left(a^2+b^2\right)\right]}{aL\left(a^2+L^2\right)+2b\left(a^3+L^3\right)} \qquad \delta_p = \left[\frac{2}{\omega\mu_o\sigma}\right]^{1/2}$$

4.- Radiación

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{j\omega t}e^{-jkR}}{R}dV' \qquad R \cong r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r} + \frac{1}{2r}\left[r'^2 - \left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}\right)^2 + \ldots\right]$$

Para una antena lineal

$$\vec{A}(r) = \vec{u}_z\frac{\mu_o}{2\pi}I_m\frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos kh}{k\sin^2\theta} \quad ; \quad \vec{E}(r) = \vec{u}_\theta j\frac{Z_oI_o}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\left[\frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos kh}{\sin\theta}\right]$$