ELECTROMAGNETISMO Septiembre 2011- Original

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas en un cuadernillo de examen como máximo. Procure ser claro y conciso.

1.- Considere el proceso de carga de un condensador de placas circulares de radio R y separadas una distancia d. Determine la variación de energía electromagnética entre las placas del condensador y su relación con el vector de Poynting. Interprete los resultados desde el punto de vista físico.

2.- La expresión de los campos para una onda monocromática que se propaga en un medio con permitividad ε y conductividad γ es

$$\mathbf{E}(\xi,t) = \mathbf{E}_o e^{-\alpha\xi}\ e^{j(\omega t-\beta\xi)} \quad ; \quad \mathbf{H} = (\beta - j\alpha)\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}}{k\mu\omega}$$

Describa los hechos físicos de importancia que se deducen de estos resultados

3.- Describa dos métodos que se utilicen para la determinación del potencial electrostático

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1

Dos placas metálicas semiinfinitas, una de ellas en forma de L, están colocadas una frente a otra formando una ranura longitudinal de espesor despreciable, como

muestra la figura 1. La placa inferior está conectada a tierra y la superior a potencial V_o. Determinar el potencial en la región entre las placas.

PROBLEMA 2

Determine la energía electrostática del sistema de la Figura 2 formado por una carga q_o en presencia de dos planos semiinfinitos formando un ángulo de 90^o

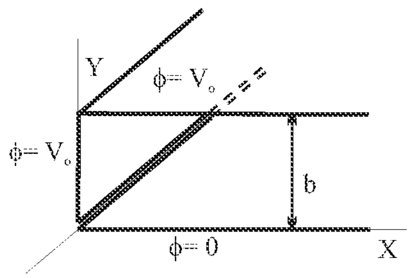

Figura 1

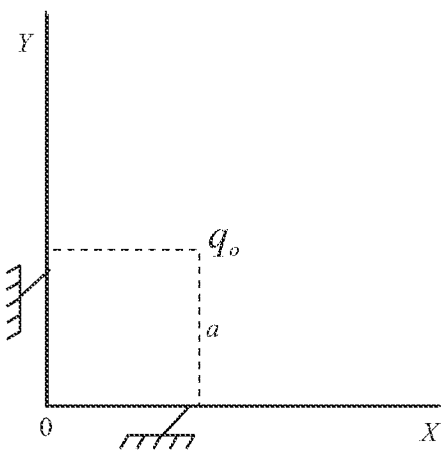

Figura 2

FORMULARIO

(1) Operaciones diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \qquad ; \qquad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad ; \qquad \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad ; \qquad \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_\rho & rA_\theta & (r\sin\theta)A_\varphi \end{vmatrix}$$

(2) Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_o\mathbf{J}$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

(3) Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L) + b_n\sin(n\pi x/L)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\cos(n\pi x/L)\ dx \qquad ; \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\sin(n\pi x/L)\ dx$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cartesianas

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad ; \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$k_x^2 > 0 \Rightarrow \quad X = A_1\exp(k_x x) - A_2\exp(-k_x x) = A_3\sinh k_x x + A_4\cosh k_x x$$

$$k_x^2 < 0 \Rightarrow \quad X = A_1\exp(j\left|k_x\right|x) - A_2\exp(-j\left|k_x\right|x) = A_3\sin(\left|k_x\right|x) + A_4\cos\left(\left|k_x\right|x\right)$$

$$k_x^2 = 0 \Rightarrow \quad X = A_1 x + A_2$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cilíndricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad ; \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

(a) Simetría axial con invarianza longitudinal

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\phi = \left(C_1 r^n + C_2 r^{-n}\right)\left(A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{sen} n\varphi\right)$$

o bien , si $n = 0$

$$\phi = \left(k_1 \ln r + k_2\ \right)\left(A_1 \varphi + B_2\right)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = \left(B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)\right)\left(A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz\right)$$

ó

$$\phi = \left(C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)\right)\left(D_1 \cos kz + D_2 \operatorname{sen} kz\right)$$

(6) **Ecuación de Laplace en c. esféricas**

$$\triangle \phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = \left(B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)$$

— —

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \qquad ; \qquad K_o(x) = N_o(jx)$$

Polinominos de Legendre

$$P_m(\cos\theta) = \frac{1}{2^m m!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^m \left(\cos^2\theta - 1\right)^m$$

$$\begin{aligned} P_o(\cos\theta) &= 1 \\ P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\ P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\ P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \end{aligned}$$