

## ELECTROMAGNETISMO Septiembre 2012- Original

**INSTRUCCIONES:** El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

**TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas. Procure ser claro y conciso, utilice la carilla de una hoja como máximo para cada pregunta.**

1. Entre las placas de un condensador cilíndrico de radios  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ) e indefinido en la dirección  $Z$ , existe un campo eléctrico de la forma

$$\mathbf{E} = A \sin \varphi / 2 \cos(\omega t) \mathbf{u}_\rho$$

¿Existen cargas libres en la región entre conductores? En caso afirmativo determine la carga por unidad de longitud.

¿Se puede expresar el campo  $\mathbf{E}$  como gradiente de un escalar? ¿Existe campo magnético?

2.- Explique el principio físico que describe la siguiente expresión y explique el significado físico de cada uno de los términos

$$\int_V \mathbf{E}' \cdot \mathbf{J} dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV + \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\gamma} dV + \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

3.- Corriente de desplazamiento. Fundamento, expresión y significado físico.

**PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)**

**PROBLEMA 1:** Considere un array de infinitas láminas conductoras situadas en el plano  $Z = 0$ . Cada lámina tiene una anchura  $a/2$  en la dirección  $X$  y una longitud infinita en la dirección  $Y$ . Las láminas se encuentran alternativamente a potencial  $+V$  y  $-V$ . Encontrar el potencial en la región  $z > 0$  (3 puntos).

**PROBLEMA 2:** Calcular el potencial en el interior del recinto de la figura, sabiendo que se verifica  $V(x, y) = 0$  para  $y = 0$ ;  $V(x, y) = 0$  para  $y = b$  y

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad y \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=a} = E_o$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

## FORMULARIO

### (1) Operaciones diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & (r \sin \theta) \mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_\rho & r A_\theta & (r \sin \theta) A_\varphi \end{vmatrix}$$

### (2) Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_o \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

### (3) Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)]$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos(n\pi x/L) dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sin(n\pi x/L) dx$$

### (4) Ecuación de Laplace en c. cartesianas

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$k_x^2 > 0 \Rightarrow X = A_1 \exp(k_x x) - A_2 \exp(-k_x x) = A_3 \sinh k_x x + A_4 \cosh k_x x$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

o bien, si  $n = 0$

$$\phi = (C_1 r^n + C_2 r^{-n}) (A_1 \cos n\varphi + A_2 \sin n\varphi)$$

$$\phi = (k_1 \ln r + k_2) (A_1 \varphi + B_2)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = (B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)) (A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz)$$

ó

$$\phi = (C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)) (D_1 \cos kz + D_2 \sin kz)$$

(6) Ecuación de Laplace en c. esféricas

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = (A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = (B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}) (A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta)$$

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{\gamma x}{2} \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_0(x) = J_0(jx) \quad ; \quad K_0(x) = N_0(jx)$$

Polinomios de Legendre

$$P_m(\cos \theta) = \frac{1}{2^m m!} \left[ \frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^m (\cos^2 \theta - 1)^m$$

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99