Electromagnetismo. Febrero 2013. 1^a Semana

Instrucciones: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. MATERIAL: Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas. Procure ser claro y conciso, utilece la carilla de una hoja como máximo para cada pregunta.

1.- Considere los siguientes potenciales: $V = 0$; $\mathbf{A} = A_o \sin(kx - \omega t)\,\mathbf{u}_y$, con A_o, ω y k constantes. Encuentre los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ y compruebe que los campos obtenidos satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío. ¿Qué condición debemos imponer sobre k?

2.- Si el flujo del vector de Poynting a través de una superficie cerrada es positivo ¿Significa esto que la energía electromagnética almacenada en el volumen limitado por dicha superficie disminuye? Razone la respuesta.

3.- ¿Qué son los potenciales de Liénard-Wiechert? A partir de qué caso general se deducen? (no se precisa deducción matemática)

PROBLEMAS: Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1 Un cilindro metálico con conductividad no nula, de radio a e indefinido en la dirección z tiene una rendija longitudinal en $\varphi = \pi$ como muestra la figura 1, y lleva una corriente en la dirección azimutal que da lugar a un potencial que varía con el ángulo azimutal en la forma: $V(a, \varphi) = (V_o \varphi)/(2\pi)$ para $-\pi < \varphi < \pi$. Encuentre el potencial en el interior del cilindro.

PROBLEMA 2 Determine el potencial sobre el eje Z debido a un anillo de radio a uniformemente cargado con una densidad lineal de carga λ_o que se encuentra en el interior de una esfera de radio b, $b > a$, contectada a tierra. El anillo es concéntrico a la esfera.

FORMULARIO

1. Operadores diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & (r\sin\theta)A_\varphi \end{vmatrix}$$

2. Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_o\mathbf{J} \quad ; \quad \nabla^2\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

3. Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L) + b_n\sin(n\pi x/L)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}F(x)\cos(n\pi x/L)dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}F(x)\sin(n\pi x/L)dx$$

4. Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

5. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

a) Simetría axial con invarianza longitudinal: $\phi = k_1 \ln\rho + k_2$

b) Invarianza longitudinal

$$\phi = \left(C_1\rho^n + C_2\rho^{-n}\right)\left(A_1\cos(n\varphi) + A_2\sin(n\varphi)\right)$$

o bien, si $n = 0$:

$$\phi = (k_1\ln\rho + k_2)(A_1\varphi + A_2)$$

c) Simetría axial

$$\phi = (B_1 J_o(k\rho) + B_2 N_o(k\rho))(A_1\sinh(kz) + A_2\cosh(kz))$$

ó

$$\phi = (C_1 I_o(k\rho) + C_2 K_o(k\rho))(D_1\sin(kz) + D_2\cos(kz))$$

6. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

a) Asimetría total

$$\phi = \left(A_1 r^n A_2 r^{-(n+1)}\right)(A_1\sin(m\varphi) + A_2\cos(m\varphi))\, P_n^m(\cos\theta)$$

b) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

7. Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \quad ; \quad K_o(x) = N_o(jx)$$

8. Polinomios de legendre