Electromagnetismo. Septiembre 2015. Reserva

Instrucciones: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas.
MATERIAL: Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas. Procure ser claro y conciso, utilece la carilla de una hoja como máximo para cada pregunta.

1.- ¿Es posible asociar un momento angular al campo electromagnético? ¿Qué ley de conservación está implicada?

2.- Demuestre que en el caso de medios anisótropos, son válidas las siguientes igualdades:

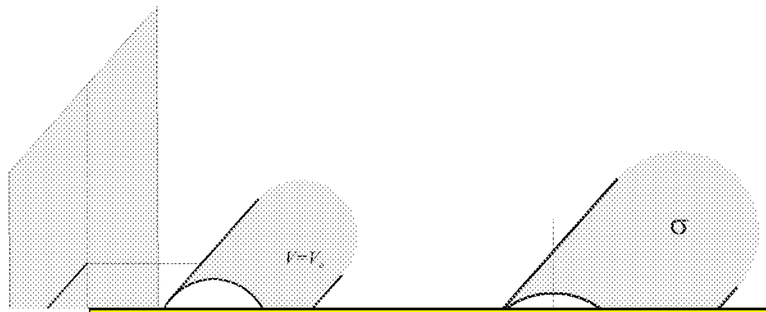
$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right) \quad ; \quad \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)$$

3.- Defina lo que es un contraste de potenciales. El contraste de Lorentz y las características de los potenciales electrodinámicos que se obtienen con este contraste.

PROBLEMAS: Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1 Encontrar la capacidad por unidad de longitud del sistema formado por un cilindro indefinido de radio a situado a una distancia d de un plano indefinido conectado a tierra.

PROBLEMA 2 Sobre una capa cilíndrica de radio a e indefinida en la dirección z se distribuye una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_o \cos\varphi$. Encuentre el potencial dentro y fuera de la capa cilíndrica.



FORMULARIO

1. Operadores diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & (r\sin\theta)A_\varphi \end{vmatrix}$$

2. Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_o\mathbf{J} \quad ; \quad \nabla^2\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

3. Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L) + b_n\sin(n\pi x/L)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}F(x)\cos(n\pi x/L)dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}F(x)\sin(n\pi x/L)dx$$

4. Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

5. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

a) Simetría axial con invarianza longitudinal: $\phi = k_1 \ln\rho + k_2$

b) Invarianza longitudinal

$$\phi = \left(C_1\rho^n + C_2\rho^{-n}\right)\left(A_1\cos(n\varphi) + A_2\sin(n\varphi)\right)$$

o bien, si $n = 0$:

$$\phi = \left(k_1\ln\rho + k_2\right)\left(A_1\varphi + A_2\right)$$

c) Simetría axial

$$\phi = \left(B_1 J_o(k\rho) + B_2 N_o(k\rho)\right)\left(A_1\sinh(kz) + A_2\cosh(kz)\right)$$

ó

$$\phi = \left(C_1 I_o(k\rho) + C_2 K_o(k\rho)\right)\left(D_1\sin(kz) + D_2\cos(kz)\right)$$

6. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

a) Asimetría total

$$\phi = \left(A_1 r^n A_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1\sin(m\varphi) + A_2\cos(m\varphi)\right)P_n^m(\cos\theta)$$

b) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

7. Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{2m}}{(m!)^2}$

$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right)J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \quad ; \quad K_o(x) = N_o(jx)$$

8. Polinomios de legendre

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^n\left(\cos^2\theta - 1\right)^n$$

ELECTROMAGNETISMO E.I.A. RESERVA

INSTRUCCIONES:

El examen consta de dos partes: Teoría (6ptos) y Problemas (4ptos). Para aprobar será necesario, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 2ptos en la de Problemas. MATERIAL: Calculadora no programable.

TEORIA

1.- Para un sistema de radiación transversal (tipo "broadside") compuesto de un número elevado de antenas isótropas en línea, la directividad puede aproximarse como

$$D \simeq \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

siendo Ω_A el ángulo sólido que abarca el haz principal (se ignoran los lóbulos menores). A partir de la definición de esta magnitud, justifique dicha expresión e indique, de manera genérica, la expresión de Ω_A.

2.- Carta de Smith. Describa brevemente en qué consiste y cite cuales son sus principales aplicaciones.

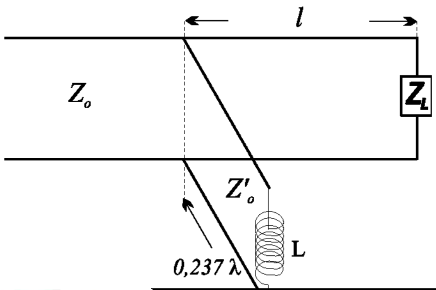
3.- Factor de calidad Q. ¿Cómo se define y qué información puede proporcionarnos acerca del comportamiento de una cavidad resonante y de los materiales que la constituyen?

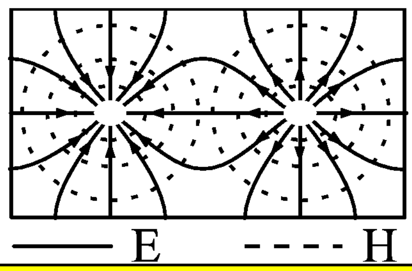
PROBLEMA 1

Una línea de transmisión de impedancia característica $Z_o = 50\Omega$, cerrada por una impedancia $Z_L = (150 + j100)\,\Omega$ está alimentada por un generador de frecuencia 10 kHz. Ha sido adaptada, como se muestra en la figura 1, mediante un "stub" formado por una sección de línea de longitud 0,237λ y de impedancia característica $Z'_o = 100\Omega$ terminada por una autoinducción L. a) Determine a qué distancia de la carga hay que colocar el "stub" y el valor de la autoinducción L que lo cierra. b) Determine la longitud del "stub" necesaria para adaptar la carga si sustituimos la autoinducción por un cortocircuito.

PROBLEMA 2

En una guía rectangular de dimensiones $a = 2b$ y dieléctrico aire, las líneas de campo de un cierto modo tienen el aspecto que se representa en la figura 2. a) De qué modo se trata, razone la respuesta. Se observa que la distancia entre dos ceros consecutivos de la componente de campo longitudinal es de 10 cm cuando la frecuencia de trabajo es 4,5 GHz. Determine las dimensiones de la guía.





FORMULARIO

1.- Sistemas de transmisión con simetría traslacional

$$E_t = \frac{1}{k^2-\beta^2}\left(j\omega\mu\vec{u}_z\times\nabla_t H_z \mp j\beta\nabla_t E_z\right) \qquad H_t = \frac{1}{k^2-\beta^2}\left(-j\omega\varepsilon\vec{u}_z\times\nabla_t E_z \mp j\beta\nabla_t H_z\right)$$

2.- Líneas de transmisión

$$Z_N = \frac{Z_{LN} + j\tan(\beta l)}{1 + jZ_{LN}\tan(\beta l)} \qquad v(l) = a_o^+ e^{j\beta l}(1+\rho) \qquad I(l) = \frac{1}{2Z_o}a_o^+ e^{j\beta l}(1-\rho)$$

3.- Guias rectangulares

Modos TE

$$H_{zmn} = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{xmn} = \left(j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{ymn} = \left(j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{xmn} = \left(j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{ymn} = \left(-j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Modos TM

$$E_{zmn} = B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{xmn} = \left(-j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)B_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{ymn} = \left(-j\frac{\beta_{mn}}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{xmn} = \left(j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}\right)B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_{ymn} = \left(-j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{k}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}\right)B_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{S_t}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{S_t}\left(\vec{E}_t\times\vec{H}_t^*\right)\cdot d\vec{s}\right]$$

$$[Q]_{101} = \frac{\mu}{\mu_o\delta_p}\frac{\ln\left[ab\left(a^2+b^2\right)\right]}{aL\left(a^2+L^2\right)+2b\left(a^3+L^3\right)} \qquad \delta_p = \left[\frac{2}{\omega\mu_o\sigma}\right]^{1/2}$$

4.- Radiación

The Complete Smith Chart