5017 ELECTROMAGNETISMO Examen del 27 de junio de 2012. Segunda parte.

Apellidos:____________________________ **Nombre:**__________________ **Matrícula:**____________

Ajuste su respuesta al espacio disponible y recuadre el resultado

Problema 1 Un circuito eléctrico C está recorrido por una intensidad alterna de frecuencia angular ω y valor máximo I. El circuito C se encuentra situado en torno al origen de coordenadas O de un sistema cartesiano x, y, z y crea, en puntos suficientemente alejados de O, un potencial vector, con la condición de contraste de Lorentz*, dado por:

$$\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi,t) = \frac{K_1}{r}\left\{\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\theta + 2\,\frac{K_1}{r}\left\{\operatorname{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi$$

Determine**:

1. la inducción magnética $\boldsymbol{B}(r,\theta,\varphi,t)$, reteniendo únicamente los términos de radiación (los que decrecen según r^{-1}).

$$\boldsymbol{B} = \frac{K_1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_r & r\boldsymbol{u}_\theta & r\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{u}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\theta\cos\omega(t-r/c) & 2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\omega(t-r/c) \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{K_1\,\omega}{rc}\operatorname{sen}\theta\Big(2\cos\omega(t-r/c)\boldsymbol{u}_\theta + \operatorname{sen}\omega(t-r/c)\boldsymbol{u}_\varphi\Big)$$

2. el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(r,\theta,\varphi,t)$, reteniendo únicamente los términos de radiación.

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = c^2\nabla\times\boldsymbol{B} = c\frac{K_1\,\omega}{r^2\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_r & r\boldsymbol{u}_\theta & r\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{u}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & 2\operatorname{sen}\theta\cos\omega(t-r/c) & \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\omega(t-r/c) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{K_1\omega^2}{r}\operatorname{sen}\theta\Big(\cos\omega(t-r/c)\boldsymbol{u}_\theta + 2\operatorname{sen}\omega(t-r/c)\boldsymbol{u}_\varphi\Big)$$

de modo que

$$\boldsymbol{E} = \frac{K_1\omega}{r}\operatorname{sen}\theta\Big(\operatorname{sen}\omega(t-r/c)\boldsymbol{u}_\theta - 2\cos\omega(t-r/c)\boldsymbol{u}_\varphi\Big)$$

3. el valor medio del vector de Poynting $<\boldsymbol{S}(r,\theta,\varphi)>$,

$$<\boldsymbol{S}(r,\theta,\varphi)> = \frac{1}{\mu_0}<\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}> = \frac{5K_1^2\omega^2}{2\,\mu_0\,c\,r^2}\operatorname{sen}^2\theta\,\boldsymbol{u}_r$$

4. el valor medio de la potencia radiada

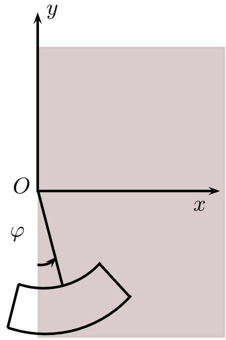
$$\left\langle\oiint\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right\rangle = \oiint<\boldsymbol{S}>\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{20\pi K_1^2\omega^2}{3\,\mu_0\,c}$$

---

*en el que los potenciales escalar Φ y vector $\boldsymbol{A}$ verifican $\nabla\cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$

**Se recuerda que en un sistema de coordenadas ortogonales (q_1, q_2, q_3) en el que $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_1\,\boldsymbol{u}_1\,\mathrm{d}q_1 + h_2\,\boldsymbol{u}_2\,\mathrm{d}q_2 + h_3\,\boldsymbol{u}_3\,\mathrm{d}q_3$ conde $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ forman una base ortonormal y a derechas, el rotacional de un campo vectorial $\boldsymbol{V} = V_1\,\boldsymbol{u}_1 + V_2\,\boldsymbol{u}_2 + V_3\,\boldsymbol{u}_3$ es $\nabla\times\boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{u}_1 & h_2\boldsymbol{u}_2 & h_3\boldsymbol{u}_3 \\ \partial_{q_1} & \partial_{q_2} & \partial_{q_3} \\ h_1\,V_1 & h_2\,V_2 & h_3\,V_3 \end{vmatrix}$

Problema 2



El circuito eléctrico de la figura tiene la forma de un sector de corona circular, de radios a, b ($b > a$) y amplitud angular $2\alpha < \frac{\pi}{2}$ (por lo tanto su área es $\alpha(b^2 - a^2)$) y está orientado en sentido congruente con el eje z, siendo su resistencia eléctrica R, su coeficiente de autoinducción despreciable e I_z su momento de inercia respecto al eje z. El circuito puede rotar en torno el eje vertical z, posicionándose por el ángulo φ (ángulo desde el eje y^- hasta el de simetría del circuito) representado en la figura y que supondremos acotado por $-\alpha \le \varphi \le \alpha$. En el semiespacio $x \ge 0$ existe una inducción magnética constante $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$, siendo nula en $x < 0$. Determine:

1. el flujo magnético a través del circuito, en función de φ, para el tramo $-\alpha \le \varphi \le \alpha$***

   Para $\frac{\pi}{2} \le \varphi < -\alpha$ es nulo; para $-\alpha \le \varphi \le \alpha$: $\Phi = \frac{1}{2}B(b^2 - a^2)(\alpha + \varphi)$; para $\frac{\pi}{2} \ge \varphi > \alpha$ es $\Phi = B(b^2 - a^2)\alpha$

2. la fuerza electromotriz inducida y la intensidad en función de la velocidad de rotación $\dot{\varphi}$ para $-\alpha \le \varphi \le \alpha$.

$$fem = -\frac{1}{2}B(b^2 - a^2)\,\dot{\varphi} \Rightarrow I = -\frac{1}{2R}B(b^2 - a^2)\,\dot{\varphi}$$

3. las potencia mecánica y eléctrica que el campo suministra al circuito en función de la velocidad de rotación $\dot{\varphi}$ para $-\alpha \le \varphi \le \alpha$.

$$P_e = \frac{1}{4R}B^2(b^2 - a^2)^2\dot{\varphi}^2$$
$$P_m = -\frac{1}{4R}B^2(b^2 - a^2)^2\dot{\varphi}^2$$

4. Si en el instante inicial $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \Omega > 0$, halle Ω para que $\varphi(t)$ sea siempre creciente y tienda asintóticamente a α

   La ecuación diferencial es

$$I_z\ddot{\varphi} + \frac{1}{4R}B^2(b^2 - a^2)^2\,\dot{\varphi} = 0$$

   por lo que

$$\dot{\varphi} = \Omega\, e^{-\dfrac{B^2(b^2 - a^2)^4}{4RI_z}t}$$
$$\varphi = \frac{4RI_z\Omega}{B^2(b^2 - a^2)^4}\left(1 - e^{-\dfrac{B^2(b^2 - a^2)^4}{4RI_z}t}\right) \to \alpha$$
$$\Omega = \frac{B^2(b^2 - a^2)^4}{4RI_z}\alpha$$

***AYUDA: se recomienda verificar que para $\varphi = -\alpha$ el flujo es nulo, para $\varphi = 0$ vale $B\frac{\alpha(b^2 - a^2)}{2}$ y para $\varphi = \alpha$ es $B\alpha(b^2 - a^2)$