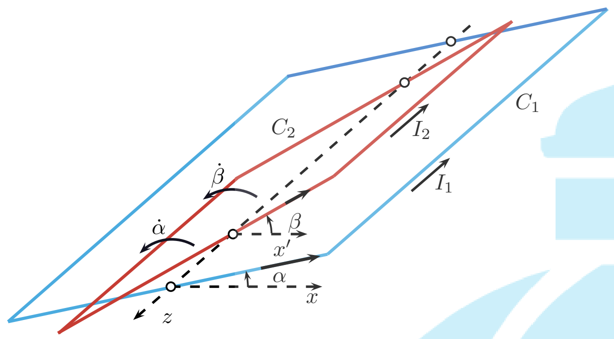
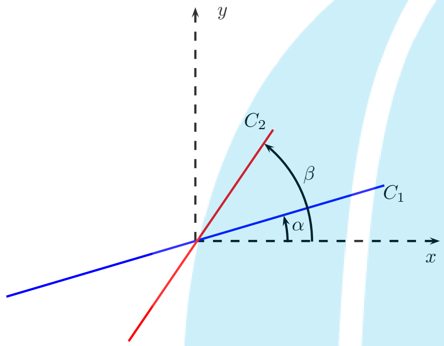
5000017 ELECTROMAGNETISMO Examen del 5 de junio de 2013. Segunda parte.
Apellidos:________________________________ **Nombre:**____________________ **Matrícula:**______________

Ajuste su respuesta al espacio disponible y escriba el resultado en el recuadro correspondiente. Se considerarán correctas únicamente las respuestas en las que lo sean la solución y los cálculos indicados para su obtención a partir de los datos del enunciado. Tiempo:90 minutos





Problema

Se desea construir un embrague electromagnético mediante un sistema de dos circuitos eléctricos C_1, C_2 de resistencias despreciables que pueden rotar en torno al eje z siendo α, β los ángulos que definen dichas rotaciones.

La matriz de coeficientes de inducción mutua es

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} L & M\cos(\beta-\alpha) \\ M\cos(\beta-\alpha) & L \end{pmatrix}$$

Se alimentan los circuitos C_1, C_2 con sendas fuentes de corriente continua de intensidades I_1, I_2 (constantes).

Un agente exterior mueve C_2 de modo que $\beta = \omega t$.

El circuito C_1 arrastra una carga que presenta en el eje z un momento de inercia I_z y un rozamiento que le frena con un momento áxico en el eje z:

$$N_{r,z} = -b\,\dot\alpha$$

siendo b una constante conocida.

I) En el instante inicial $t = 0$, $\alpha_0 = -\frac{\pi}{6}$, $\dot\alpha_0 = 0$. Determine, para este instante ($t = 0$) y en función de M, I_1, I_2, ω:

1) la fuerza electromotriz inducida en el circuito C_1

$$\Phi_1 = LI_1 + MI_2\cos(\beta-\alpha) \Rightarrow \mathcal{E}_1 = -\dot\Phi_1 = MI_2(\dot\beta-\dot\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha) \Rightarrow \mathcal{E}_1(0) = MI_2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\omega = \frac{MI_2\omega}{2}$$

2) la fuerza electromotriz inducida en el circuito C_2

$$\Phi_2 = LI_2 + MI_1\cos(\beta-\alpha) \Rightarrow \mathcal{E}_2 = -\dot\Phi_2 = MI_1(\dot\beta-\dot\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha) \Rightarrow \mathcal{E}_2(0) = MI_1\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\omega = \frac{MI_1\omega}{2}$$

3) el momento áxico en el eje z de las fuerzas que el campo electromagnético aplica al circuito C_1

$$N_{z1} = I_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} = MI_1I_2\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha) \Rightarrow N_{z1}(0) = MI_1I_2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{MI_1I_2}{2}$$

4) 5) las potencias (P_{F_1}, P_{F_2}) suministradas por las fuentes de corriente de C_1, C_2 y la suministrada por el agente mecánico exterior (P_A).
Las tensiones en las fuentes $F_{1,2}$ vendrán dadas por

$$V_{F_{1,2}} + \mathcal{E}_{1,2} = 0 \Rightarrow P_{F_{1,2}} = I_{1,2}V_{F_{1,2}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P_{F_1} & = & -\frac{MI_1I_2\omega}{2} \\ P_{F_2} & = & -\frac{MI_1I_2\omega}{2} \end{array} \right.$$

Para la parte mecánica, dado que el circuito C_2 no se acelera, $N_A + N_{z2} = 0$ y por lo tanto

$$P_A = -N_{z2}\omega = \frac{MI_1I_2\omega}{2}$$

II) A partir de ahora se asumen las condiciones iniciales: $\alpha_0 = 0$, $\dot\alpha_0 = 0$ y los valores: $\frac{MI_1I_2}{I_z} = 20\,\mathrm{s}^{-2}$, $\frac{b}{I_z} = \omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, $I_z = 1\,\mathrm{kg\,m}^2$.

6) Sea el ángulo δ definido por $\delta(t) = \omega t - \alpha(t)$. Escriba la ecuación diferencial de segundo orden cuya incógnita sea $\delta(t)$ (en radianes), estando t expresado en segundos.

$$I_z\ddot\alpha = MI_1I_2\,\mathrm{sen}(\omega t-\alpha) - b\dot\alpha$$

o bien

$$\ddot\delta + \frac{MI_1I_2}{I_z}\,\mathrm{sen}\,\delta + \frac{b}{I_z}\dot\delta = \frac{b}{I_z}\omega$$

o bien, en el S.I.:,

$$\ddot\delta + \dot\delta + 20\,\mathrm{sen}\,\delta = 1$$

E.T.S.I.I. Departamento de Física Aplicada a la Ingeniería Industrial

7) Determine, el valor de $\operatorname{sen}\delta$ hacia el que tiende el sistema cuando $t \to \infty$.

Cuando $t \to \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{sen}\delta = \frac{1}{20}$$

8) y 9) Asumiendo que $\delta(t) \ll 1$, linealice la ecuación diferencial en torno a $\delta = 0$, halle $\alpha(t)$ (α en radianes y t en segundos) y particularice para obtener dicho ángulo 2 segundos después del instante inicial. Calcule también la energía total, (en J) suministrada a la fuente de corriente del circuito C_1 desde el instante inicial hasta 2 segundos después.

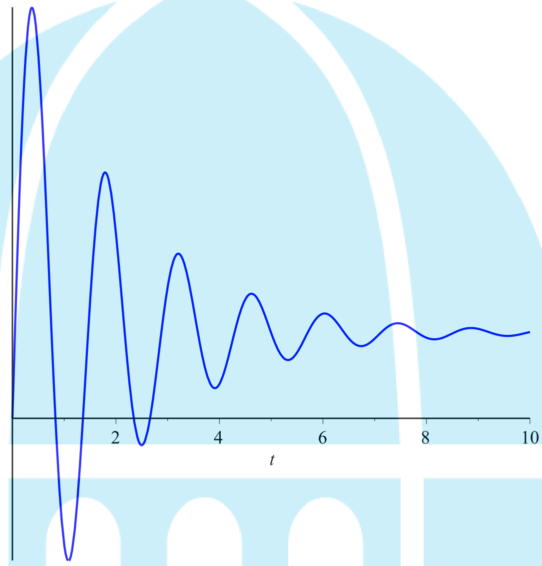
De la ecuación anterior, obtenemos

$$\ddot{\delta} + \dot{\delta} + 20\delta = 1$$

que define

$$\delta(t) = \frac{2}{\sqrt{79}} e^{-t/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{79}}{2} t + \frac{1}{20} - \frac{1}{20} e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{79}}{2} t$$

representada en la siguiente figura:



El ángulo $\alpha(t) = \omega t - \delta(t)$ resulta

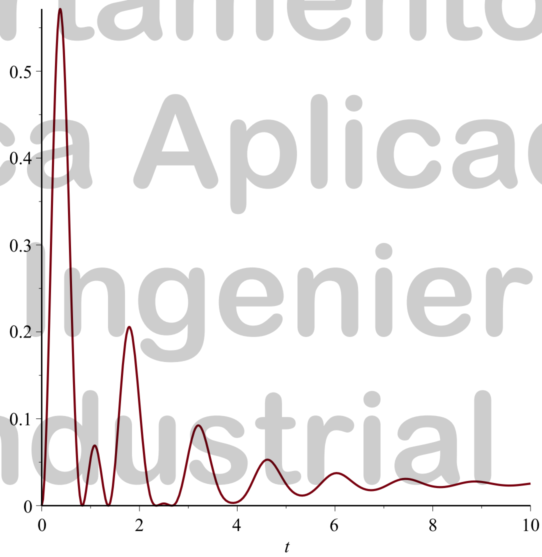
$$\alpha(t) = t - \frac{2}{\sqrt{79}} e^{-t/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{79}}{2} t - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{79}}{2} t$$

con lo que $\alpha(2) = 1{,}891$.

La energía suministrada al circuito C_1 mediante la fuerza electromotriz hasta el instante t es:

$$W_{e1} = \int_0^t I_1 \mathcal{E}_1 \, \mathrm{d}\, t$$

representada en la siguiente figura:

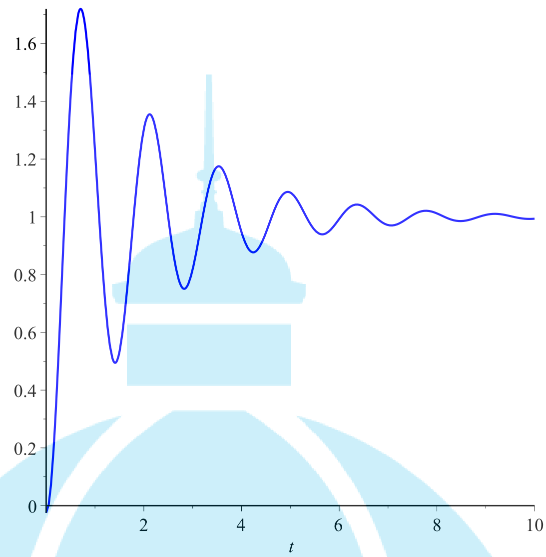


y por lo tanto, para el instante considerado,

$$\int_0^2 I_1 \mathcal{E}_1 \, \mathrm{d}\, t = M I_1 I_2 \int_0^2 \operatorname{sen}\delta \dot{\delta} \mathrm{d}\, t = M I_1 I_2 \left(1 - \cos\delta(2)\right) = 0{,}117\,\mathrm{J}$$

E.T.S.I.I.
Departamento de Física Aplicada a la Ingeniería Industrial

El funcionamiento como embrague se aprecia al visualizar la evolución de la velocidad $\dot{\alpha}$ en función del tiempo cuando $\dot{\beta}$ pasa de ser nula a 1 rad/s; la siguiente figura muestra la evolución de $\dot{\alpha}$.



E.T.S.I.I.
Departamento de
Física Aplicada
a la Ingeniería
Industrial