5000017 ELECTROMAGNETISMO Examen del 3 de julio de 2013. Segunda parte. Publicación de notas: 17 de julio de 2013.

Apellidos:____ **Nombre:**_________________________ **Matrícula:**_________________

Ajuste su respuesta al espacio disponible y escriba el resultado en el recuadro. Se considerarán correctas únicamente las respuestas en las que lo sean la solución y los cálculos indicados para su obtención a partir de los datos del enunciado. Tiempo:90 minutos.

Problema 1

Entre dos superficies esféricas conductoras centradas en el origen de coordenadas O y de radios a, b ($a < b$), se sitúa un medio dieléctrico lineal e isótropo, pero no homogéneo, de constante dieléctrica $\epsilon_r(r) = a^2\, r^{-2}\, e^{r/b}$.

La carga eléctrica sobre la superficie esférica interior es Q y sobre la exterior es $-Q$, permaneciendo dichas superficies aisladas. Determine:

1.- El campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ en el dieléctrico.

Si se aplica el teorema de Gauss al desplazamiento eléctrico:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\boldsymbol{u}_r \Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, a^2\, e^{r/b}}\,\boldsymbol{u}_r$$

2.- La polarización $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$.

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \chi_e\epsilon_0\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\, a^2\, e^{r/b}}\,(\,a^2\, r^{-2}\, e^{r/b} - 1)\,\boldsymbol{u}_r$$

3.- La densidad volumínica de energía electrostática $u(\boldsymbol{r})$ en el dieléctrico.

Para la densidad de energía

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\,\epsilon_0\; a^2\, e^{r/b}\, r^2}$$

4.- La diferencia de potencial entre las superficies esféricas.

La diferencia de potencial se obtiene integrando el campo eléctrico

$$V_b - V_a = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, a^2}\int_a^b e^{-r/b}\mathrm{d}\, r$$

con lo que

$$V_b - V_a = -\frac{Qb}{4\pi\epsilon_0\, a^2}\,(e^{-a/b} - \frac{1}{e})$$

5.- La matriz de potencial (la matriz inversa de la de capacidad) del sistema formado por las dos superficies esféricas conductoras.

El potencial V_b está determinado sólo por la carga neta $(Q_a + Q_b)$ por lo que

$$A_{bb} = A_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b}$$

En cuando al potencial V_a, cuando $Q_b = -Q_a$, aprovechando el apartado anterior queda

$$V_b - V_a = -\frac{Q_a b}{4\pi\epsilon_0\, a^2}\,(e^{-a/b} - \frac{1}{e}) = -A_{bb}Q_a + A_{ab}Q_a - A_{aa}Q_a + A_{ab}Q_a \Rightarrow A_{aa} - A_{ab} = \frac{b}{4\pi\epsilon_0\, a^2}\,(e^{-a/b} - \frac{1}{e})$$

y por lo tanto

$$A_{aa} = \frac{b}{4\pi\epsilon_0\, a^2}\,(e^{-a/b} - \frac{1}{e}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b}$$

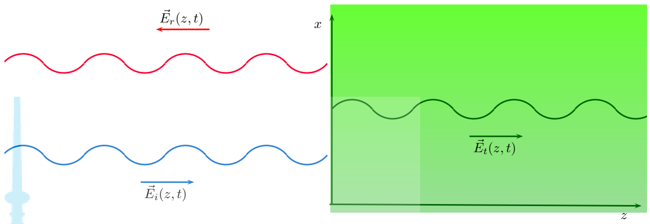
y la matriz de potencial queda

$$\overline{\overline{A}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b}\begin{pmatrix} 1 + \frac{b^2}{a^2}\,(e^{-a/b} - \frac{1}{e}) & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Una onda plana electromagnética que se propaga por el vacío presenta un campo eléctrico:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\boldsymbol{i} \tag{1}$$



Esta onda incide normalmente sobre un vidrio de índice de refracción $n_v = 1{,}5$, de forma que parte es reflejada y parte es transmitida. Determine:

1) el vector de Poynting $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ de la onda incidente y su promedio temporal.

   La intensidad del campo magnético es

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{u}_z \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,E_0\,\cos(\omega t - kz)\boldsymbol{j}$$

   de modo que el vector de Poynting queda:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\cos^2(\omega t - kz)\boldsymbol{u}_z$$

   que es una función de periodo $T = \pi/\omega$;su promedio temporal queda, integrando entre 0 y T,

$$\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\boldsymbol{S}(t)\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\,\frac{\omega}{\pi}\,\boldsymbol{u}_z\int_0^{\pi/\omega}\left(\frac{1+\cos 2(\omega t - kz)}{2}\right)\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\boldsymbol{u}_z$$

2) las amplitudes complejas del campo eléctrico de la onda transmitida $\underline{\boldsymbol{E}}_t$ y de la onda reflejada $\underline{\boldsymbol{E}}_r$.

   La continuidad de las componentes tangenciales de las intensidades eléctrica y magnética permite escribir:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\underline{E}_i + \underline{E}_r & = & \underline{E}_t\\ \underline{E}_i - \underline{E}_r & = & n_v\,\underline{E}_t\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\underline{E}_t & = & \frac{2}{1+n_v}E_0\\ \underline{E}_r & = & \frac{1-n_v}{1+n_v}E_0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\underline{\boldsymbol{E}}_t & = & \frac{2}{1+n_v}E_0\,\boldsymbol{i}\\ \underline{\boldsymbol{E}}_r & = & \frac{1-n_v}{1+n_v}E_0\,\boldsymbol{i}\end{array}\right.$$

3) los coeficientes de transmisión T y reflexión R para las potencias reflejadas y transmitidas.

$$\left\{\begin{array}{lcl}\underline{H}_t & = & n_v\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{2}{1+n_v}E_0\\ \underline{H}_r & = & \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{1-n_v}{1+n_v}E_0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\langle\boldsymbol{S}_t(\boldsymbol{r})\rangle & = & n_v\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{2}{(1+n_v)^2}E_0^2\\ \langle\boldsymbol{S}_r(\boldsymbol{r})\rangle & = & \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{(1-n_v)^2}{2(1+n_v)^2}E_0^2\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}T & = & \frac{4n_v}{(1+n_v)^2}\\ R & = & \frac{(1-n_v)^2}{(1+n_v)^2}\end{array}\right.$$