EXAMEN DE
MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ESTADÍSTICA I
9-Febrero-2017

1. **[1pto]** Contesta las siguientes cuestiones sobre series numéricas:

a) Di el carácter (convergente, divergente u oscilante) de $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

b) Halla la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot 2^{n+1}}$. ¿Por qué sabemos, antes de calcularla, que esa suma va a ser finita?

2. **[1pto]** Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, escribe $(f \circ g)(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq -1 \\ 2x, & x > -1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-4, & x > 2 \\ 3x, & x \leq 2 \end{cases}$$

3. Para la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$,

a) **[0.5ptos]** Di cuál es su dominio

b) **[1pto]** Encuentra todas sus asíntotas

c) **[0.5ptos]** Estudia su concavidad

d) **[0.5ptos]** Haz un esbozo de su gráfica

4. **[1pto]** Calcula $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$

5. **[1pto]** ¿Será cierto que $e^x - 7x = -2$ para algún $x \in [1, 4]$? Si existe un x así, ¿será único? Usa algún teorema para fundamentar tu respuesta

6. **[1pto]** Se ha observado que, en una carretera de salida de una gran ciudad, la velocidad de los coches entre las 2 y las 6 horas de la tarde viene dada por $v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8$. ¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad? ¿Y con menor?

7. Resuelve las siguientes cuestiones relacionadas con integrales:

a)**[1pto]** $\int x^2 \ln(x)\, dx$

b)**[0.5ptos]** Halla el valor de $k > 0$ para que $f(x) = k^2 e^{-kx}$ sea función de densidad; es decir, para que $\int_0^{\infty} f(x)\, dx = 1$

c)**[1pto]** Calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 + 1$, la recta $y = \frac{-x}{2} + \frac{5}{2}$, y los ejes OX^+ y OY^+

$\boxed{\text{RAZONA TUS RESPUESTAS. NO DES RESULTADOS EN FORMA DECIMAL}}$

① a) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}}$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{n e^{-n^2}} = \lim_n \frac{(n+1)e^{-n^2-2n-1}}{n e^{-n^2}} =$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)e^{-2n-1}}{n} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e^{2n}}\right) = 0 < 1$$

CONVERGE

b) $$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n 2^{n+1}}}_{\substack{\text{Serie geom. de} \\ r=\frac{1}{6}<1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1/6}{1-\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1/6}{5/6} =$$

| CONVERGE

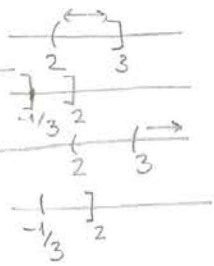
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

②

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \le -1 \\ 2x & x > -1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-4 & x > 2 \\ 3x & x \le 2 \end{cases}$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x)+1 & g(x) \le -1 \\ 2g(x) & g(x) > -1 \end{cases} = \begin{cases} x-4+1, & x-4 \le -1 \wedge x > 2 \\ 3x+1, & 3x \le -1 \wedge x \le 2 \\ 2(x-4) & x-4 > -1 \wedge x > 2 \\ 2(3x) & 3x > -1 \wedge x \le 2 \end{cases}$$

$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x \le 3 \wedge x > 2 \\ 3x+1, & x \le -\frac{1}{3} \wedge x \le 2 \\ 2x-8, & x > 3 \wedge x > 2 \\ 6x, & x > -\frac{1}{3} \wedge x \le 2 \end{cases}$$



$$\boxed{(f\circ g)(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \le -1/3 \\ 6x & -\frac{1}{3} < x \le 2 \\ x-3 & 2 < x \le 3 \\ 2x-8 & 3 < x \end{cases}}$$

③ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$

$\boxed{x = 0}$ asíntota vertical

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 \qquad \boxed{m = 1}$

$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 \qquad \boxed{m = 1}$

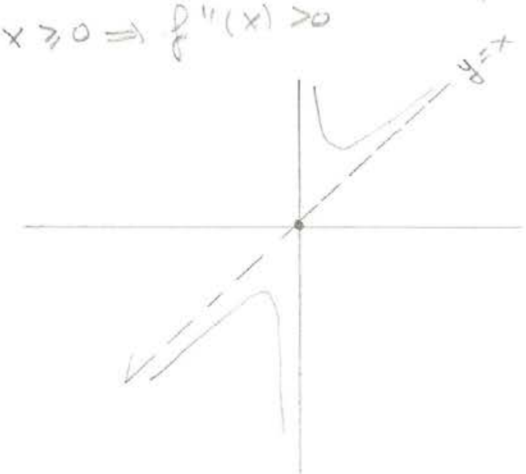
$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\left(x + \frac{1}{x}\right) - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0}$

Asíntota oblicua: $\boxed{y = x}$

c) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \wedge \quad f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

$x \leq 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ CONCAVIDAD HACIA ABAJO

$x \geq 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ " " ARRIBA



④ $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = \ell \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \operatorname{Ln}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}\right] = \operatorname{Ln} \ell$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{Ln}\frac{1}{x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \underset{\infty/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1/x^2}{1/x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(\operatorname{sen}^2 x)\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-(\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen}^2 x)\frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\operatorname{sen} x)(\cos x)}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{1} = 0 \text{ , luego } \operatorname{Ln} \ell = 0 \Rightarrow \ell = e^0 = \boxed{1}$$

⑤ ¿ $f(x) = e^x - 7x + 2 = 0 \;/\; \exists x \in [1,4]$?

$f(1) = e - 7 + 2 = e - 5 < 0$

$f(4) = e^4 - 28 + 2 = 54{,}598 - 26 > 0$ (f es continua en $[1,4]$)

Por el Teor. de Bolzano $\exists x_0 \in (1,4)$ t. q. $f(x_0) = 0$

es decir: $\boxed{e^{x_0} - 7x_0 = -2}$

$f'(x) = e^x - 7$; y $f''(x) = e^x$ $\left\{ \begin{array}{l} e^x = 7 \Rightarrow x = \ln 7 \\ f''(x) > 0 \text{ conc. hacia arriba} \end{array} \right.$

es ÚNICO

⑥ $v'(t) = 3t^2 - 30t + 72 = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

$v''(t) = 6t - 30$ $\quad v''(6) = 6 > 0$ hay MÍN.

$\quad v''(4) = -6 < 0$ hay MÁX.

A las 6 h circulan con menos velocidad

A las 4 h " con más "

⑦ a) $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx =$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x^2 \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

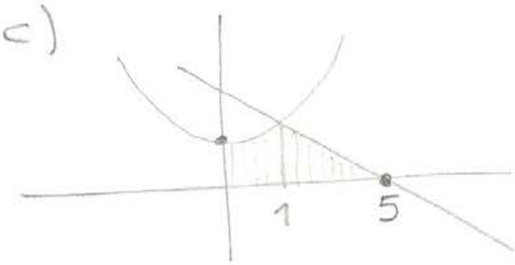
b) $\int_0^\infty k^2 e^{-kx} dx = \lim_{m \to \infty} \int_0^m k^2 e^{-kx} dx =$

$= \lim_{m \to \infty} \left(-k \int_0^m -k e^{-kx} dx \right) = -k \cdot \lim_{m \to \infty} \left(e^{-kx} \right]_0^m =$

$= -k \lim_{m \to \infty} \left(e^{-km} - 1 \right) = -k \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{e^{km}} - 1 \right) = k$

Luego: $\boxed{k = 1}$

c)



$x^2 + 1 = \frac{-x}{2} + \frac{5}{2}$

$2x^2 + 2 = -x + 5$

$2x^2 + x - 3 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} \begin{cases} 1 \\ -3/2 \end{cases}$

$\text{Área} = \int_0^1 (x^2+1) dx + \int_1^5 \left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + 5x \right]_1^5 =$

$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{-25}{2} + 25 + \frac{1}{2} - 5 \right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{-25 + 50 + 1 - 10}{2} \right) =$

$= \frac{4}{3} + \frac{1}{4} 16 = \frac{4}{3} + 4 = \boxed{\frac{16}{3}}$