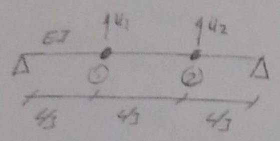
• 1A b)

PARA LA SIGUIENTE ESTRUCTURA, LOS SIGUIENTES DATOS SON CONOCIDOS



$$[k] = \frac{162EI}{5L^3}\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \frac{mL}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SE SOLICITA:

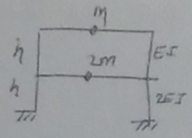
1) OBTENER LAS FRECUENCIAS PROPIAS Y MODOS PROPIOS (POR UNIFORMIDAD, TOMAR EL VALOR UNITARIO PARA PRIMER MODO)

2) OBTENER POR ANÁLISIS MODAL, LOS DESPLAZAMIENTOS CUANDO EXISTE UNA CARGA EN NODO 1 $\quad P_1 = 100 \operatorname{sen} 25t$

3) OBTENER LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y LEY DE DESPLAZAMIENTOS, CONSIDERANDO RAZONES DE AMORTIGUAMIENTO DEL 10% EN EL SISTEMA

3 b)

TENEMOS LA SIGUIENTE ESTRUCTURA:



CON $[m] = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$

$[k] = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad k = \frac{24EI}{h^3}$

Y CONOCEMOS $W_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$; $W_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\phi = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

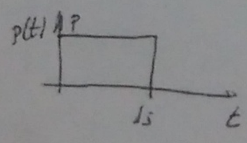
SE REQUIERE

1) RESPUESTA A VIBRACIÓN LIBRE CONOCIENDO QUE $u(0) = (1/2 \;\; 1)^T$; $\dot{u}(0) = (0 \;\; 0)^T$

2) MISMO CASO PERO CON $u(0) = (-1/2 \;\; 2)^T$ y $\dot{u}(0) = (0 \;\; 0)^T$

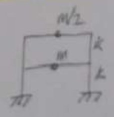
3) SIMULAR SI SISTEMA QUEDA SOMETIDO A:

$p_1(t) = P(t)$
$p_2(t) = 2P(t) \qquad P = 100 \text{ kN}$



PC b)

PARA EL SISTEMA DE LA FIGURA SE CONOCEN LOS PARÁMETROS SIGUIENTES

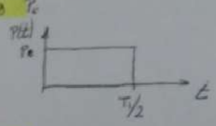


$\omega_1 = 0,765\sqrt{k/m}$ $\phi_1 = (0,707 \;\; 1)^T$

$\omega_2 = 1,848\sqrt{k/m}$ $\phi_2 = (-0,707 \;\; 1)^T$

$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m/2 \end{bmatrix}$; $[k] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$

EN CIERTO INSTANTE SE APLICA UNA FUERZA IMPULSIVA EN LA MASA DEL PRI[MER]
NIVEL, DE DURACIÓN $T_1/2$ (DONDE T_1 ES EL PERÍODO PROPIO DE VIBRACIÓN DE LA ES[TRUCTURA])
Y AMPLITUD P_0

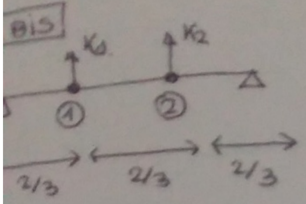


SE PIDE DEFINIR LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y LOS DESPLAZAMIENTOS EN
FUNCIÓN DEL TIEMPO DURANTE LA FASE DE EXCITACIÓN (NO NECESARIA L[A]
FASE DE VIBRACIÓN LIBRE)

b)

EL SISTEMA DE LA FIGURA SE ENCUENTRA SOMETIDO A VIBRACIÓN LIBRE Y
TIENE COMO MATRICES [k] y [m] LAS DEFINIDAS MÁS ABAJO. SE PIDE ESTIMAR [LA]
AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO POR ANÁLISIS MODAL SABIENDO QUE $u_1(0) = u_2(0) = 0$,
Y LAS VELOCIDADES EN $t = 0$ s SON 0,1 cm/s

$k = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$ $m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



$$[K] = \frac{162EI}{5L^3}\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \frac{ML}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

) obtener frecuencias propias y modos propios.

$$\det([K] - \omega^2 [m]) = 0.$$

$$\left[K \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} - \omega^2\, m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 8K - \omega^2 m & -7K \\ -7K & 8K - \omega^2 m \end{vmatrix} = (8K - \omega^2 m)(8K - \omega^2 m) - 49K^2 = 0$$

$$\omega^4 m^2 - 16K\omega^2 m + 15K^2 = 0.$$

mbio de variable.

$$\omega_1^2 = t_1 = 15 \cdot \frac{K}{m} \longrightarrow \omega_1 = \sqrt{15 \cdot \frac{K}{m}}$$

$$\omega_2^2 = t_2 = \frac{K}{m} \longrightarrow \omega_2 \sqrt{K/m}$$

odos propios.

ra $\phi_1 = \omega_1$ $\quad |[K] - \omega_1^2 [m]|\,[\phi_1]| = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 8K - \omega^2 m & -7K \\ -7K & 8K - \omega^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8K - 15K & -7K \\ -7K & 8K - 15K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\phi_{11} = -\phi_{21}} \rightarrow \begin{array}{l} \phi_{11} = 1 \\ \phi_{21} = -1 \end{array}$$

$$\boxed{\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

a $\phi_2 = \omega_2$.

$$\begin{pmatrix} 8K - K & -7K \\ -7K & 8K - K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\phi_{12} = \phi_{22} \rightarrow \begin{array}{l} \phi_{11} = 1 \\ \phi_{22} = 1 \end{array}$$

$$\boxed{\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

b) obtener por análisis modal, los desplazamientos con una carga en el nodo 1. $P_1 = 100 \, sen \, 25t$

$m_n \cdot \ddot{q}_n + K_n \, q_n = P_n \cdot sen \, \omega t \rightarrow P_n = \phi_n^t \cdot P_0 = 100.$

$P_{10} = \phi_1^t \, P_0 = 100.$

$P_1 = (1 \; -1) \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = 100$

$P_2 = (1 \; 1) \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = 100.$

1 Grado de libertad.

$u(t) = \frac{P_0}{K \cdot (1-\beta^2)} \cdot sen \, \omega t$

$\beta = \frac{w}{w_n}$ $\quad q_n(t) = \frac{P_n}{K_n \cdot (1-\beta_n^2)} \cdot sen$

c). Ecuaciones de movimiento y desplazamientos suponiendo un amortiguación del 10%.

$q_n(t) = \frac{P_n}{K_n} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{w_n}{w}\right)^2} \cdot sen \, \omega t$

$\beta.$

$K_1 = (1 \; -1) \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\frac{162EI}{5L^3} \right) = \frac{6 \cdot 162EI}{L^3} = 30K.$

$K_2 = 2K.$

$q_1(t) = \frac{100}{30K} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{25}{\sqrt{15 K/m}} \right)^2} \cdot sen \, 25t$

$q_2(t) = \frac{100}{2K} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{25}{\sqrt{K/m}} \right)^2} \cdot sen \, 25t$

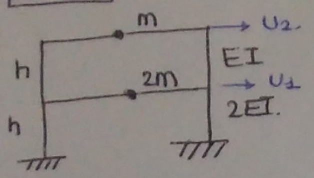
$\mu = \phi = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ -q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$

$$\boxed{u(t) = \frac{P_0}{K} \left[\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] sen \, \omega t \; \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \cos \omega t}$$

$m\{\ddot{u}\} + c\{\dot{u}\} + k\{\mu\} = [P].$

$\frac{m \cdot \{\ddot{u}\}}{} + \frac{c\{\dot{\mu}\}}{} + \frac{k\{\mu\}}{} = \frac{[P]}{} \rightarrow \ddot{u} + 2w_n \xi \dot{\mu} + w_n^2 \cdot \mu = \frac{P}{}$

PB. Bis



$$[m] = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad [k] = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{24EI}{H^3} \qquad \omega_1 = \sqrt{K/2m} \qquad \omega_2 = \sqrt{2K/m}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Respuesta a vibración libre dado $u(0) = (1/2 \ \ 1)^T$
$\dot{u}(0) = (0 \ \ 0)^T$

$$u(t) = \Sigma \phi_n \cdot q_n$$

$$q_n = \frac{\phi_n^T [m] \{u\}}{\phi_n^T [m] \phi_n}$$

$$q_1(0) = \frac{(1/2 \ \ 1) \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(1/2 \ \ 1) \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{(1/2 \ \ 1) \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}}{(1/2 \ \ 1) \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}}$$

$$q_2(0) = \frac{(-1 \ \ 1) \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(-1 \ \ 1) \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{(-1 \ \ 1) \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}}{(-1 \ \ 1) \begin{bmatrix} -2m \\ m \end{bmatrix}} = 0$$

plicando la fórmula

$$u(t) = \Sigma \phi_n q_n = \Sigma \phi_n \left[q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega} \operatorname{sen} \omega_n t \right]$$

$$u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{1 \cos \omega_1 t + \frac{0}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t}_{\phi_1 \text{ (nodo 1)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 0 \cdot \cos \omega_2 t + \frac{0}{\omega_2} \operatorname{sen}}_{\phi_2 \text{ (nodo 2)}}$$

$$\boxed{u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t}$$

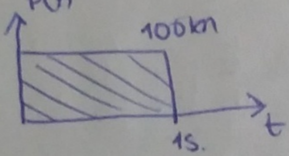
b) idem con $u(0) = (1/2 \quad 2)^T \quad \dot{u}(0) = (0 \quad 0)^t$

$$q_1(0) = \frac{(1/2 \quad 1)\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}}{(1/2 \quad 1)\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1.$$

$$q_2(0) = \frac{(-1 \quad 1)\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}}{(-1 \quad 1)\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1.$$

$$\boxed{u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \cdot \cos w_1 t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \cdot \cos w_1 t}$$

c) Si sometemos al sistema a



$P_1(t) = P(t)$

$P_2(t) = 2P(t)$

$$u(t) = \frac{P_0}{k}(1 - \cos w n t).$$

Dos grados de libertad $[P][K]; [w_1, w_2]$.

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \phi_n^{+}[P] \\ M_n &= \phi_n^{T}[M]\,\phi_n \\ K_n &= \phi_n^{T}[K]\,\phi_n \end{aligned}\right] \qquad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$P_1 = \overbrace{(1/2 \quad 1)}^{\phi_1^{t}}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

$$P_2 = \underbrace{(-1 \quad 1)}_{\phi_2^{t}} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

$$K_1 = (1/2 \quad 1)\begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0{,}75K$$

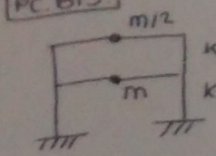
$$K_2 = (-1 \quad 1)\begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6K.$$

$$\boxed{q_n(t) = \frac{P_n}{K_n}(1 - \cos w n t)} \rightarrow q_1(t) = \frac{250}{0{,}75K} \cdot \left(1 - \cos\sqrt{K/2 \cdot m}\; t\right)$$

$$\rightarrow q_2(t) = \frac{100}{6K} \cdot \left(1 - \cos\sqrt{2K/m}\; t\right)$$

$$\boxed{u(t) = \sum \phi_n \cdot q_n(t)}$$

PC. BIS

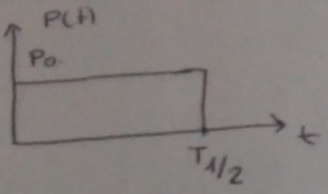


$\omega_1 = 0{,}765\sqrt{\frac{K}{m}}$ $\quad \phi_1 = (0{,}707 \quad 1)^T$

$\omega_2 = 1{,}848\sqrt{\frac{K}{m}}$ $\quad \phi_2 = (-0{,}707 \quad 1)^T$

$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m/2 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$

En cierto instante se aplica una fuerza impulsiva de duración $T_1/2$.



Escribir las ecuaciones de movimiento y los desplazamientos en función del tiempo durante la excitación.

Ec. movimiento: $m\ddot{U} + KU = Po$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Despl. en función del tiempo para vibración ...

$$u(t) = \frac{Po}{K}(1 - \cos\omega_n t).$$

$P_1 = (0{,}707 \quad 1)\begin{bmatrix} Po \\ 0 \end{bmatrix} = 0{,}707\,Po \rightarrow K_1 = (0{,}707 \quad 1)\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}[\ldots$

$P_2 = (-0{,}707 \quad 1)\begin{bmatrix} Po \\ 0 \end{bmatrix} = -0{,}707\,Po \rightarrow K_2 = (-0{,}707 \quad 1)\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}[\ldots$

$K_1 = 0{,}586K$

$K_2 = 3{,}414K$

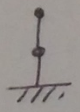
$$\left.\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{0{,}707\,Po}{0{,}586\,K}(1 - \cos\omega_1 t). \\ q_2(t) &= \frac{0{,}707\,Po}{3{,}414\,K}(1 - \cos\omega_2 t). \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{u(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}707 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q_1(t) + \begin{pmatrix} -0{,}70\ldots \\ 1 \end{pmatrix}}$$

PD. BIS

Sistema en vibración libre. Dados [K] y [M] estimar la amplitud de desplazamiento por análisis modal. Sabiendo $U_1(0)=U_2(0)=0,3cm$. Velocidades en $t=0s$ $0,1cm/s$.

$$K=\begin{bmatrix}10 & -5\\ -5 & 10\end{bmatrix} \quad m=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$



$\boxed{\det([K]-\omega^2[m])=0}$ → Frecuencias propias y modos propios. $\boxed{([K]-\omega^2[m])\begin{pmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\end{pmatrix}=0}$

$U_1(0)=U_2(0)=0,3\ cm.$

$\dot{U}_1(0)=\dot{U}_2(0)=0,1\ cm/s.$

$\omega_1=\sqrt{5}\ rad/s$ $\quad \phi_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

$\omega_2=\sqrt{1,66}\ rad/s$ $\quad \phi_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$$U(t)=\sum \phi_n \cdot q_n(t)$$

$$U(t)=\sum \phi_n\left[q_n(0)\cdot\cos\omega_n t+\frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n}\cdot\operatorname{sen}\omega_n t\right]$$

$$q_1(0)=\frac{\phi_1^t[m][U]}{\phi_2^t[m]\phi_1}=\frac{(1\ -1)\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,3\\0,3\end{bmatrix}}{(1-1)\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}=0$$

$$q_2(0)=\frac{\phi_2^t[m]\{U\}}{\phi_2^t[m]\phi_2}=\frac{(1\ 1)\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,3\\0,3\end{bmatrix}}{(1\ 1)\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}=0,3$$

$$\dot{q}_1(0)=\frac{\phi_1^T[m]\dot{U}_0}{\phi_1^t[m]\phi_1}=\frac{(1\ -1)\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,1\\0,1\end{bmatrix}}{(1-1)\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}=0.$$

$\dot{q}_2(0)=0,1.$

$$(t)=\begin{Bmatrix}U_1(t)\\U_2(t)\end{Bmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}0\cdot\cos\omega_1 t+\frac{0}{\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}0,3\cos\omega\right.$$

$$+\frac{0,1}{\omega_n}\cdot\operatorname{sen}\omega_2 t$$

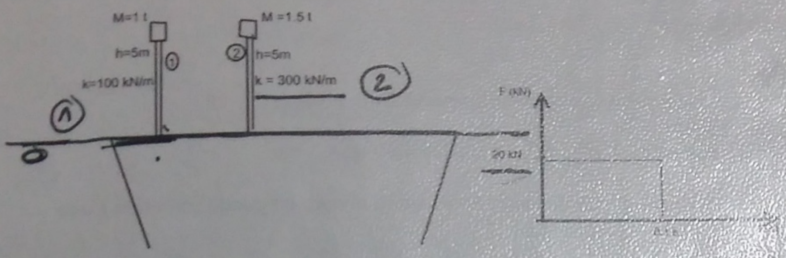
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2015-2016 DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Final) 27_01_2016

EJERCICIOS PRÁCTICOS: Tiempo **1h 15** minutos

PP1 (2.5p)

En el techo puente de una fragata existen 2 palos de antenas y equipos, asimilables a sistemas como los de la figura (suponer mástil empotrado en el techo del puente).



Se produce una explosión en una zona cercana, quedando sometidos los mástiles a una fuerza como la mostrada en la figura. Se solicita.

1.- (0.6p) Obtener el desplazamiento máximo para el mástil 1 respecto al techo puente

2.- (0.5p) Fuerza cortante y momento flector en la base

3.- (0.7p) Similar respecto al mástil 2. Conclusiones

4.- (0.7p) Si en el caso 2, el momento flector es un 15% mayor del admisible, justificar qué parámetro modificaría para reducir las tensiones.

PP2 (2.5p)

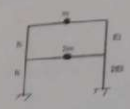
El soporte de un equipo de medición tiene una rigidez de 40 kN/m y una masa de 150 kg. Se conoce que la razón de amortiguamiento es ξ. En cierto momento se pone en funcionamiento el generador de emergencia situado en un local cercano, que genera una fuerza armónica de amplitud 100kN y frecuencia $2\pi f$. Sabiendo que cuando $W/W_n = 3$, la fuerza transmitida al equipo es del 20% de la fuerza máxima de excitación, se pide:

1.- (1.25p) Calcular los valores de la frecuencia de excitación para que la fuerza transmitida sea menor de 70 kN

2.- (1.25p) Si el equipo de medida se sustituye por otro similar pero con masa 400 kg, y la frecuencia del generador de emergencia se fija a f = 2.5 Hz, ¿Cuál será el valor de la fuerza transmitida?

PP3 (2.5p)

Una estructura se asemeja a la mostrada en la figura, y se conocen los siguientes datos:



$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$

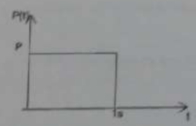
$[K] = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ $k = 24\,EI/h^3$; $w_1 = \sqrt{k/(2m)}$ $w_2 = \sqrt{2k/m}$; $\phi = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Se pide:

1.- (0.7p) Obtener la respuesta en vibración libre conociendo: $u(0) = (1/2 \quad 1)^T$, $\dot{u}(0) = (0 \quad 0)^T$

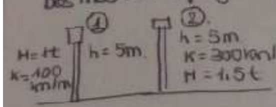
2.- (0.7p) Similar pero con $u(0) = (-1/2 \quad 2)^T$ y velocidad en t=0s es cero.

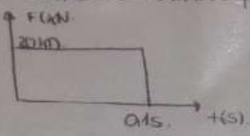
* 3.- (1.1p) Obtener la respuesta de desplazamientos cuando el sistema queda sometido a una carga $p_1(t) = P(t)$ y $p_2(t) = 2\,P(t)$, con P=100 kN



PP1

Dos mástiles de fragata quedan sometidos a una explosión





1) Desplazamiento máximo para el mástil 1.

$\cdot\, m_1 \ddot{u} + K_1 u = P_0$

$\left.\begin{array}{l} P_0 = 20 \text{ kn} \\ M_1 = 1\,T \\ h = 5 \\ K_1 = 100 \text{ kn/m} \end{array}\right\}$ $T_n = \dfrac{2\pi}{w_n} = \dfrac{2\pi}{10} = 0{,}628$; $w_n = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = \sqrt{\dfrac{100}{1}} = 10 \text{ rad/s}$ $\Bigg\}$ $\dfrac{t_1}{T_n}$ [illegible]

PULSO CORTO

$I_1 = P_0 t_1 = 20 \cdot 0{,}1 = 2 \text{ kn/s}$

$u_{01} = \dfrac{I}{m_1 w_1} = \dfrac{2 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3 \cdot 10} = 0{,}2 \text{ m}$

2) Fuerza cortante y momento flector en la base.

$|Mf| = F_{11} L + F_{21} L$

$Mf = F \cdot h$

$\sigma_{max} = \dfrac{Mf}{W_n \text{ (módulo)}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} F = K \cdot u = 100 \cdot 0{,}2 = 20 \\ Mf = 20 \cdot 5 = 100 \end{array}}$$

3) Similar al mástil 2.

$m_2 \cdot \ddot{u} + K_2 u = P_0$

$\left.\begin{array}{l} P_0 = 20 \text{ kn} \\ M_2 = 1{,}5\,t \\ h = 5 \\ K_2 = 300 \text{ Kn/m} \end{array}\right\}$ $w_n = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = \sqrt{\dfrac{300}{1{,}5}} = 14{,}14 \text{ rad/s}$; $T_n = \dfrac{2\pi}{w_n} = \dfrac{2\pi}{14{,}14} = 0{,}444$ $\Bigg\}$ $\dfrac{t_2}{T_n} = 0{,}225$ s

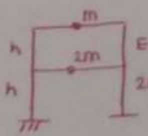
PULSO CORTO

$I_2 = P_0 \cdot t_2 = 20 \cdot 0{,}1 = 2 \text{ kn/s}$

$u_{01} = \dfrac{I}{m_2 w_2} = \dfrac{2 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 14{,}14} = 0{,}094 \text{ m}$

$$\boxed{\begin{array}{l} F_2 = K \cdot u = 300 \cdot 0{,}09 \\ \quad = 28{,}2 \\ Mf = 20 \cdot 5 = 100 \end{array}}$$

EJERCICIO PRÁCTICO 3 (PPB) - ENERO 2016.



$[M] = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ $\quad K = 24EI/h^3 \quad$ $\phi = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$ $\quad W_1 = \sqrt{K/2M}$

$W_2 = \sqrt{2K/M}$

1) obtener la respuesta en vibración libre conociendo. $u(0) = (1/2 \quad 1)^t$

$\dot{u}(0) = (0 \quad 0)^t$

Matriz modal. $[\phi] = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$q_n(t) = q_n(0)\cos w_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{w_n}\operatorname{sen} wt$$

MODO 1

$$\cdot\, q_1(0) = \frac{\phi_1^t [m]\, u(0)}{\phi_1^t [m]\, \phi_1} = \frac{[1/2 \quad 1]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{[1/2 \quad 1]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}[1/2 \quad 1]} = \frac{[\frac{1}{2}m \quad m]}{[\frac{1}{2}m \quad m]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m + m}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m + m} = \frac{\frac{m}{4} + m}{\frac{m}{4} + m} = \frac{\frac{5m}{4}}{\frac{5m}{4}} = \boxed{1}$$

$$\left.\begin{aligned} q_1(0) &= 1 \\ \dot{q}_1(0) &= 0 \end{aligned}\right\} q_1(t) = \cos wt$$

MODO 2

$$q_2(0) = \frac{\phi_2^t [m]\, u(0)}{\phi_2^t [m]\, \phi_2} = \frac{[-1 \quad 1]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{[-1 \quad 1]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{[-m \quad 2m]}{[-m \quad 2m]}$$

$$= \frac{\frac{-m}{2} + 2m}{m + 2m} = \frac{\frac{-m}{2} + \frac{4m}{2}}{3m} = \frac{3m/2}{3m} = \frac{3m}{2} : \frac{3m}{1} = \frac{3m}{2\cdot 3m} =$$

$$\left.\begin{aligned} q_2(0) &= \frac{1}{2} \\ \dot{q}_2(0) &= 0 \end{aligned}\right\} q_2(t) = \frac{1}{2}\cdot\cos w_2 t$$

• los desplazamientos $u(t) = \sum \phi_n q_n$.

$$\boxed{u(t) = \sum \phi_n q_n = \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}\cos w_1 t + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{1}{2}\cdot\cos w_2 t}$$

mayor influencia de w_1

) Repetir para $u(0) = (-1/2 \quad 2)^t$ y velocidad $t=0$ es cero.

Matriz modal. $[\phi] = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad u(0) = (-1/2 \quad 2)^t$

$\dot{u}(0) = (0 \quad 0)^t$

$$q_n(t) = q_n(0) \cos w_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{w_n} \operatorname{sen} w t$$

$\boxed{\text{MODO 1}}$

$$\cdot\ q_1(0) = \frac{\phi_1^t [m]\, u(0)}{\phi_1^t [m]\, \phi_1} = \frac{[1/2 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}}{[1/2 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} [1/2 \quad 1]} = \frac{[\frac{1}{2}m \quad 2m] \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}}{[\frac{1}{2}m \quad 2m] \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2m}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m + m} = \frac{-\frac{m}{4} + \frac{8m}{4}}{\frac{m}{4} + \frac{4m}{4}} = \frac{\frac{7m}{4}}{\frac{5m}{4}} = \frac{7}{5}$$

$$= \boxed{\frac{7}{5}} \qquad \left.\begin{aligned} q_1(0) &= \frac{7}{5} \\ \dot{q}_1(0) &= 0 \end{aligned}\right\} q_1(t) = \frac{7}{5} \cos w_1 t$$

$\boxed{\text{MODO 2}}$

$$q_2(0) = \frac{\phi_2^t [m]\, u(0)}{\phi_2^t [m]\, \phi_2} = \frac{[-1 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}}{[-1 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{[-m \quad 2m] \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}}{[-m \quad 2m] \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{\frac{m}{2} + 4m}{+m + 2m} = \frac{\frac{m}{2} + \frac{8m}{2}}{3m} = \frac{9m}{2} \cdot \frac{3m}{1} = \frac{9m}{2 \cdot 3m} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} q_2(0) &= 3/2 \\ \dot{q}_2(0) &= 0 \end{aligned}\right\} q_2(t) = \frac{3}{2} \cos w_2 t$$

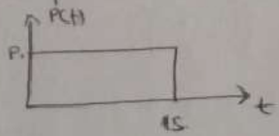
$\cdot$ Desplazamientos $u(t) = \Sigma \phi_n q_n$

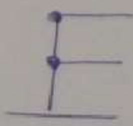
$$\boxed{u(t) = \Sigma \phi_n q_n = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{7}{5} \cos w_1 t + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{3}{2} \cos w_2 t}$$

Mayor influencia de w_2.

3) Desplazamiento cuando el sistema queda sometido a

$$\left.\begin{array}{l} p_1(t) = p(t) \\ p_2(t) = 2p(t) \end{array}\right\} \quad P = 100\,kN.$$





$(p_2(t) = 2p(t) = 200\,kN.$

$p_1(t) = P. \quad = 100\,kN$

$$P_N. \begin{cases} P_1 = (1/2 \quad 1). \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = 200 \\ P_2 = (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = -100. \end{cases}$$

$$K_N = \begin{cases} K_1 = (1/2 \quad 1) \begin{pmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/2 K, \; 1/2 K) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ K_2 = (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6K \end{cases}$$

$$M_N. \begin{cases} m_1 = (1/2 \quad 1) \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} m. \\ m_2 = (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3m. \end{cases}$$

$$q = \frac{P_0}{K} (1 - \cos \omega t)$$

$$q_1 = \frac{200}{3/4 K} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{K}{2m}} \cdot t\right)$$

$$q_2 = \frac{-100}{6K} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{2K}{m}} \cdot t\right).$$

$$(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{200}{\frac{3}{4}K} \cdot \left(1 - \cos \sqrt{\frac{K}{2m}} \cdot t\right) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{-100}{6K} (1-$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES

Asignatura PP2 EXAMEN ENERO
Alumno .... n.º ....
Curso ....Grupo ...... Fecha ....

Equipo de medición $K = 40\,kN/m$ y una masa de 150Kg.
Amortiguamiento $= \xi$
Generador de emergencia genera un armónico de amplitud de 100kN y $f = 2\pi f$.
Sabiendo que $w/w_n = 3$. La fuerza transmitida al equipo es del 20% de la fuerza máxima de excitación.

1) Valores de la frecuencia de excitación para que la fuerza transmitida sea < 70

$K = 40\,KN/m$
$m = 150\,Kg$.

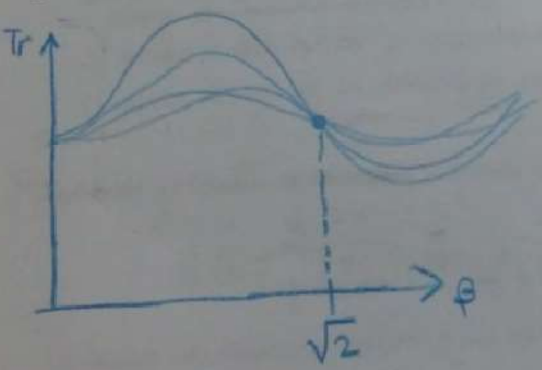
$A = 100$
$2\pi f$.

$\beta = \frac{w}{w_n} = 3.$

$F_{Transmitida} = 0{,}2 \cdot F_{excitacion}$

$$\beta = \frac{w}{w_n} = 3 \longrightarrow \frac{F_{transmitida}}{F_{excitacion}} = 0{,}2 = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$\xi = 0{,}212.$



$$Tr = \frac{F.\,Transmitida}{F.\,excitacion} = \frac{70}{100}$$

$$\frac{70}{100} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$\beta = 1{,}6 = \frac{w}{w_n}.$

$w = 1{,}6\,w_n = 1{,}6 \cdot 16{,}3 =$

$26{,}11\,rad/s = 2\pi f = ? \Rightarrow \boxed{f = 4{,}15\,Hz}$

2) Sustituimos el equipo por otro de medida $m = 400 kg$.
La frecuencia se cambia a $f = 2,5 Hz$.
¿ cual será la F_T ?

$$F_{transmitida} = F_{excitacion} \cdot \sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1-\beta)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

¡ojo que β ha cambiado ahora! ⚠

$$\xi = \frac{c}{c.crit.} = \frac{c}{2mW_n} \rightarrow 0{,}212 = \frac{c}{2 \cdot 150 \cdot 26{,}11.} \rightarrow c = \underline{\underline{1660{,}6}}$$

$$\xi' = \frac{c}{c.crit.} = \frac{c}{2mW_n.} = 0{,}1207.$$

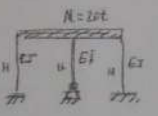
$$W_n = \sqrt{\frac{40 \cdot 10^3}{400}} = 10 rad/s.$$

$$F_{TR} = F.exc \cdot \sqrt{\frac{1 + (2 \cdot 0{,}1207 \cdot 1{,}57)^2}{(1 - 1{,}57^2) + (2 \cdot 0{,}1207 \cdot 1{,}57)^2}}$$

$$\frac{W}{W_n} = \frac{2\pi \cdot 2{,}5}{10} = 1{,}57 = \beta.$$

$$F.excitacion \cdot 0{,}711 = 0{,}711 \cdot 100 = \boxed{71{,}1 kN}$$

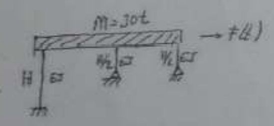
(P1) DE LA SIGUIENTE ESTRUCTURA, SE CONOCE QUE $EI = 5000\ kN\,m^2$. LAS COLUMNAS TIENEN MASA RÍGIDA FLEXIONAL. SUPONER MASA DE 20 t CONCENTRADA EN TABLERO (ASUMIDO RÍGIDO). DESPRECIANDO EL AMORTIGUAMIENTO. SE PIDE:



1) ANTE VIBRACIÓN LIBRE CON CONDICIONES INICIALES $u(0_s) = 0{,}05\,m$; $\dot{u}(t=0_s) = 1\,m/s$, ESTIMAR LA ALTURA "H" PARA QUE DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL MÁXIMO NO SUPERE 8,1 cm

2) SI EL TERRENO SUFRE UN MOVIMIENTO ARMÓNICO TIPO $u(t) = u_0 \cdot \sin \bar{\omega} t$, CON $u_0 = 0{,}04\,m$ y $\bar{\omega} = 20\ rd/s$, INDICAR LA SOLUCIÓN DE DESPLAZAMIENTO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO. EXPLICAR Y COMPARAR LOS DESPLAZAMIENTOS MÁXIMOS RESPECTO AL DE EXCITACIÓN. OBTENER EL FACTOR DE TRANSMISIBILIDAD

(P2) EL SISTEMA ESTRUCTURAL SIGUIENTE, CON MASA 30t Y RIGIDEZ DE COLUMNAS $EI = 8000\ kN\,m^2$ QUEDA SOMETIDO A UNA FUERZA DE EXCITACIÓN $F(t) = F_0 \cdot \sin 10t$



SE PIDE:

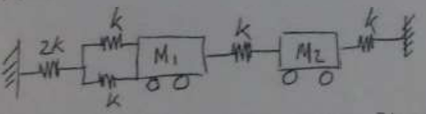
1) ALTURA DE LAS COLUMNAS "H" PARA LIMITAR LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL A 12 rd/s

2) OBTENER EL VALOR DE F_0 PARA CONSEGUIR QUE EL DESPLAZAMIENTO MÁXIMO NO SUPERE LOS 6 cm (ASUMIR QUE FRECUENCIA NO CAMBIA = 12 rd/s)

3) OBTENER LA FUERZA CORTANTE DE CADA COLUMNA PARA EL VALOR DE F_0 OBTENIDO PREVIAMENTE

4) OBTENER EL VALOR DE LA AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL ESTÁTICO ASOCIADO A F_0

(P3) 1) OBTENER LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO, UTILIZANDO D'ALEMBERT, DEL SIGUIENTE SISTEMA + POSICIÓN (

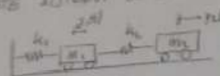


2) CALCULAR LAS FRECUENCIAS PROPIAS Y LOS MODOS PROPIOS

3) OBTENER LA AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE CADA MASA ANTE VIBRACIÓN LIBRE CON

$u_1(0) = 0{,}3\,cm$; $\dot{u}_1(0) = 0\,cm/s$; $u_2(0) = 0{,}3\,cm$; $\dot{u}_2(0) = 0\,cm/s$

(P4) PARA EL SIGUIENTE SISTEMA DE 2 GDL INDICADO EN LA FIGURA SE PIDE:



$m_1 = 35$ kg $k_1 = 8750$ N/m

$m_2 = 17,5$ kg $k_2 = 3500$ N/m

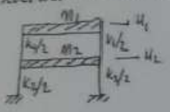
1) OBTENER LAS MATRICES DE RIGIDEZ Y MASA

2) CALCULAR FRECUENCIAS PROPIAS Y MODOS PROPIOS (CONSIDERAR PRIMERA COMPONENTE = 1)

3) CALCULAR LA RESPUESTA CUANDO LA MASA m_1 SE DESPLAZA 1m Y SE DEJA VIBRAR LIBREMENTE

(P5) UN SISTEMA MASA - RESORTE - AMORTIGUADOR SE SOMETE A VIBRACIÓN LIBRE. LA MASA ES DE 100 kg. SE DESPLAZA 2 cm DE SU POSICIÓN DE EQUILIBRIO Y SE LIBERA. AL FINAL DE 20 CICLOS, HAN PASADO 4 SEGUNDOS Y TIENE AMPLITUD DE 0,15 cm. CON ESTOS DATOS SE PIDE OBTENER LA RIGIDEZ "k" Y AMORTIGUAMIENTO "c"

(P6) PARA LA ESTRUCTURA DE LA FIGURA (EMPOTRADA EN PARTE INFERIOR), SE CONOCE

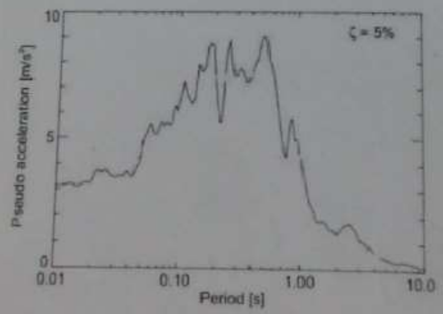


$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} kg \; ; \; [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix}$$

$w_1 = 6,2$ Hz ; $w_2 = 16,2$ Hz

$\beta_1 = 1,17$; $\beta_2 = 0,28$; ratio de amortiguamiento = 5%. Matriz modal $[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

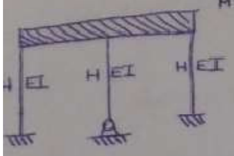
SE PIDE OBTENER LOS VALORES DE DESPLAZAMIENTOS MÁXIMOS "U", CONOCIENDO EL ESPECTRO QUE SE ACOMPAÑA:



Asignatura PP1
Alumno .... n.º ....
Curso .... Grupo ...... Fecha ....

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS NAVALES

$M = 20t$ $\quad EI = 5000 \, kN \cdot m^2$



Despreciamos amortiguamiento $\rightarrow \boxed{\xi = 0}$

1) Suponiendo vibración libre.

$U(0s) = 0{,}05m$

$\dot{U}(t = 0s) = 1 \, m/s$

Desplazamiento horizontal máx ($U_{max} = 8{,}1 \, cm$)

Calcular la altura.

$$K_{equivalente} = \Sigma K_i = 2 \cdot \left(\frac{12EI}{H^3}\right) + \frac{3EI}{H^3} = \frac{27EI}{H^3}$$

$$\boxed{U_{(t)} = C \cdot \cos((\omega_n t - \theta))}$$

$$C_{(amplitud)} = \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{\dot{U}_0}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{(0{,}05)^2 + \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^2} = 8{,}1 \, cm \cdot 10^{-2}$$

$$(8{,}1 \cdot 10^{-2})^2 = (0{,}05)^2 + \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$4{,}061 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{1/4{,}061 \cdot 10^{-3}} = 15{,}69$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow 15{,}69^2 = \frac{K_{eq}}{m} \rightarrow K_{eq} = 15{,}69^2 \cdot 20 \cdot 10^3$$

$$K_{eq} = \frac{27EI}{H^3} \rightarrow \frac{27EI}{H^3} = 15{,}69^2 \cdot 20 \cdot 10^3$$

$$\frac{27 \cdot (5000 \cdot 10^3)}{15{,}69^2 \cdot 20 \cdot 10^3} = H^3 \rightarrow H = 3{,}045 \, m \approx \boxed{3m}$$

2) Si sufre un movimiento armónico tipo $\boxed{u(t) = u_b \cdot \text{sen}\, \omega t}$

$\omega = 20\ rad/s$

$u_b = 0{,}04\ m$

Indicar el desplazamiento en función del tiempo.

Explicar y comparar los desplazamientos máximos respecto al de excitación.

Obtener el factor de transmisibilidad.

$\boxed{m\ddot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)}$

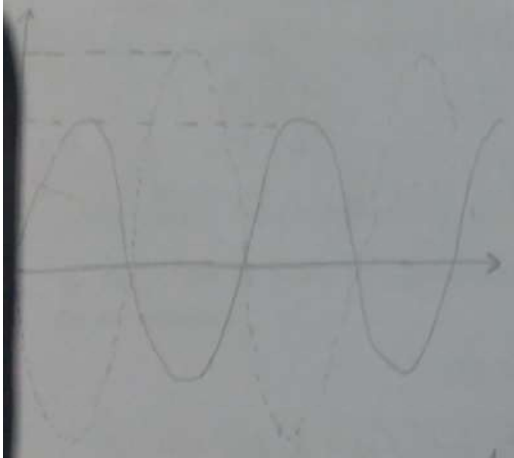
$\beta = \dfrac{\overline{\omega}}{\omega_n} = \dfrac{20\ rad/s}{15{,}69} = 1{,}275$

$\boxed{u_p = \dfrac{u_0}{1-\beta^2} \cdot \text{sen}\, \overline{\omega} t + \alpha}$

$u_p = \dfrac{0{,}04\ m}{(1-(1{,}275)^2)} \cdot \text{sen}\, 20t + \alpha$

$\boxed{u_p = \dfrac{0{,}04\ \text{sen}\,(20t + \alpha)}{-0{,}62485}}$

Ecuación de desplazamiento en función del tiempo



$T_R = \dfrac{F\ transmitida}{F\ excitación}$

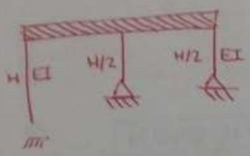
$T_R = \dfrac{A\ transmitida}{A\ excitación}$

(transmisibilidad) $= \dfrac{u_{p\,max}}{u_0} = \dfrac{1}{(1-\beta^2)} = \dfrac{1}{(1-1{,}27^2)} = 1{,}632$

$u_{p\,max} = 0{,}04 \cdot 1{,}632 = 0{,}06528$

Asignatura [PP2]
Alumno .... n.º ....
Curso .... Grupo ...... Fecha ....

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES



$m = 30t$

Rigidez $EI = 8\,000 kn/m^2$

Sometido a una fuerza de excitación $F(t) = F_0 \cdot sen\, 10t$

1) altura de las columnas "H" para limitar la frecuencia fundamental a 12 rad/s

$w_n = 12 rad/s.$

$K_{eq} = w_1^2 = \frac{K}{m} \longrightarrow K = w_1^2 \cdot m \longrightarrow K = (12 rad/s^2 \cdot 30.000) = 4.320.000 N$
4 320 KN

$K_{eq} = \frac{12EI}{H^3} + 2 \cdot \left(\frac{3EI}{(H/2)^3}\right) = 4\,320\,000 N$

$\frac{12EI}{H^3} + \frac{6EI}{(H/2)^3} = 4.320.000 N \longrightarrow \frac{12 \cdot (8.000 \cdot 10^3)}{H^3} + \frac{6 \cdot (8.000 \cdot 10^3)}{(H/2)^3} = 4.320.000$

$\frac{96.000.000}{H^3} + \frac{48.000.000}{\frac{H^3}{8}} = 4.320.000 \longrightarrow$ "Solve" $\boxed{H = 4,8075}$

2) Obtener el valor de Fo para conseguir que el desplazamiento máximo no supere los 6cm. (la frecuencia no cambia). $w_n = 12 rad/s$

$A =$ amplitud $= 6cm = 0,06m$
$W = 12 rad/s$

$A = \frac{F_0}{K_{eq}} \cdot \frac{1}{(1-\beta)^2} = 0,06m.$

$0,06 = \frac{F_0}{4\,320\,000 \cdot (1-\beta)^2} \longrightarrow F_0 = 0,06 \cdot 4.320 \cdot 10^3 \cdot (1-\beta^2)^2$

$\beta = \frac{\overline{w}}{w_n} = \frac{10}{12} = 0,8\widehat{3}$

$F_0 = 0,06 \cdot 4.320 \cdot 10^3 \cdot (1-0,83^2)$

$\boxed{F_0 = 79.200 N.}$

3) Obtener la fuerza cortante de cada columna.

$\frac{F_0}{K_e} \rightarrow$ desplazamiento U

$$\frac{F_0}{K_e} = \frac{F_1}{K_1} = \frac{F_2}{K_2} = \frac{F_3}{K_3}$$

$$\frac{79.200 = F_0}{4.320.000 = K_e} = \frac{F_1}{K_1} \longrightarrow \frac{79{,}2 \cdot 10^3}{4.320 \cdot 10^3} = \frac{F_1}{\frac{12 \cdot EI}{H^3}}$$

$$\frac{0{,}22\,EI}{H^3} = F_1 \qquad \frac{0{,}22 \cdot 8000 \cdot 10^3}{4{,}8075^3} = 15.839{,}99 \approx \boxed{15.840\,N}$$

$$\frac{79{,}2 \cdot 10^3}{4.320 \cdot 10^3} = \frac{F_2}{\frac{3EI}{\left(\frac{H}{2}\right)^3}} \longrightarrow \frac{0{,}055 \cdot 8000 \cdot 10^3}{(2{,}404)^3} = F_2 = 31.679{,}97 \approx \boxed{31.680\,N}$$

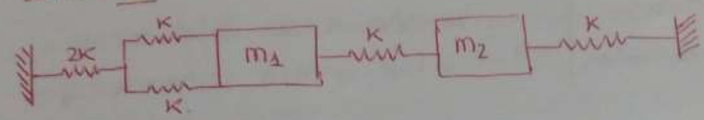
$$\boxed{F_2 = F_3 = 31.860\,N}$$

4) Obtener el valor de la amplitud de desplazamiento horizontal estático a... a F_0.

$$U_0 \rightarrow \frac{F_0}{K_e} = \frac{79.200}{4.320.000} = \boxed{0{,}018\hat{3}\,m}$$

Asignatura PP3 ....
Alumno .... n.º ....
Curso .... Grupo ...... Fecha ....

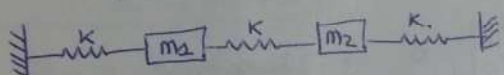
ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES



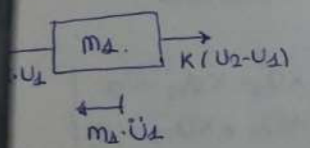
1) obtener la ec. movimiento D'alembert del sistema.

obtenemos la Kequivalente. $K_{eq} = K + K = 2K$.

$$K_{eq} = \frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{2K} + \frac{1}{2K} = \frac{2}{2K} = \frac{1}{K} = \boxed{K}$$



Aplicando el sistema a cada masa.

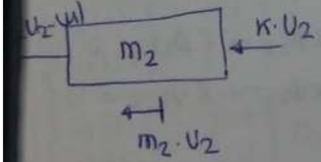


luego la ecuación de equi...

$$\boxed{K(U_2-U_1) - KU_1 = m_1 \ddot{U}_1}$$

$$KU_2 - KU_1 - KU_1 = m_1 \ddot{U}_1$$

$$KU_2 - 2KU_1 = m_1 \ddot{U}_1.$$



$$\boxed{-K(U_2) - K(U_2-U_1) = m_2 \ddot{U}_2}$$

$$-KU_2 - KU_2 + KU_1 = m_2 \ddot{U}_2$$

$$-2KU_2 + KU_1 = m_2 \ddot{U}_2$$

$$\boxed{[m]\{u\} + [K]\{u\} = 0}$$

$$\left.\begin{array}{ll} m_1\ddot{U}_1 & 2KU_1 - KU_2 = 0. \\ m_2\ddot{U}_2 & KU_1 + 2KU_2 = 0. \end{array}\right\} \quad [K] = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ K & +2K \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Calcular las frecuencias y modos propios

Frecuencias propias $|K - \omega^2 m| = 0$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 m & 0 \\ 0 & \omega^2 m \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 2K - \omega^2 m & -K \\ -K & 2K - \omega^2 m \end{bmatrix} = 0.$$

$2K - \omega^2 m - K = 0$. $\omega_1^2 m = 3K \rightarrow$

$-K + 2K - \omega^2 m = 0$ $\omega_2^2 m = K \rightarrow$

Resolviendo

$$\omega_1^2 = \frac{3K}{m} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$\boxed{[K - \omega_1^2 m]\, \phi = 0}$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} - \frac{K}{m}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = 0. \rightarrow \text{2 Ecuaciones}$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} - \frac{3K}{m}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = 0. \longrightarrow \text{2 Ecuaciones.}$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = 0 \quad \ldots \quad \begin{cases} K\phi_{11} - K\phi_{12} = 0 \\ -K\phi_{11} + K\phi_{12} = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Luego } \phi_{11} = \phi_{12} \quad (K\phi_{11} = K\phi_{12})}$

Resolviendo para el otro caso de ω_2. $\longrightarrow$ $\begin{cases} -K\phi_{21} - K\phi_{22} = \\ -K\phi_{21} - K\phi_{2,2} = \end{cases}$

$(K\phi_{21} - K\phi_{22}) = \phi_{21} = -\phi_{22}$

Luego los modos obtenidos son $\boxed{\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES

Asignatura ....
Alumno .... n.º ....
Curso .... Grupo ...... Fecha ....

* Va a poner algo de ec. de equilibrio o con mat. de influencia (siempre cae una u otra)

3) Amplitud de desplazamiento horizontal de cada masa ante vibración libre considerando

$$\left.\begin{array}{ll} u_1(0) = 0{,}3\,cm & u_2(0) = 0{,}3\,cm \\ \dot{u}_1(0) = 0\,cm/s & \dot{u}_2(0) = 0\,cm/s \end{array}\right\}$$

$$u(t) = \sum_1^n \phi_n \cdot q_n(t) = \phi_1 \cdot q_1(t) + \phi_2 q_2(t).$$

$$\boxed{q_1(t) = \frac{\phi_n^T \cdot [M] \cdot \{u\}}{\phi_n^T \cdot [M]\, \phi_n}}$$

$$q(0) \rightarrow q_1(0) = \frac{[1\ 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}}{[1\ 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = 0{,}3$$

$$q_2(0) = \frac{[-1\ 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}}{[-1\ 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = 0$$

$$\dot{q}_1(0) = 0 = \dot{q}_2(0).$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 0{,}3 \cos \omega_1 t + \underbrace{0\, \text{sen}\, t}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 0 \cos \omega_2 t + 0}_{\rightarrow 0}$$

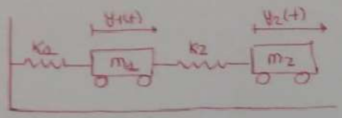
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 0{,}3 \cos \omega_1 t}$$

$\boxed{\dot{q} = 0}$??

$\omega_1 \rightarrow \left(\frac{K}{m_1}\right)$??

Asignatura PP4
Alumno .... n.º ......
Curso ...... Grupo ...... Fecha ......

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES



$m_1 = 35$ kg. $K_1 = 8750$ N/m
$m_2 = 17{,}5$ kg. $K_2 = 3500$ N/m

1) Obtener las matrices de rigidez y masa.

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 17{,}5 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8750+3500 & -3500 \\ -3500 & 3500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,250 & -3500 \\ -3500 & 3500 \end{bmatrix}$$

2) Calcular las frecuencias propias y modos propios (considerar primera componente = 1).

$$\text{Det.}\ \big[[K]-\omega^2[m]\big] = 0 \quad \begin{array}{l} \to \omega_1 \\ \to \omega_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 12.250 - 35x^2 & -3500 \\ -3500 & 3500+(-17{,}5x^2) \end{bmatrix} = 0.$$

$x_1 - \omega_1^2 = 115.$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{115}\ \text{rad/s}}$$

$x_2 = 435 = \omega_2^2$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{435}\ \text{rad/s}}$$

$[K]-\omega^2[m]\,\phi_i = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} 47\phi_{11} - 20\phi_{12} = 0. \\ -20\phi_{11} + 8{,}5\phi_{12} = 0 \end{array}\right\} \phi_{11} = 1 \to \phi_{12} = 2{,}35. \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}35 \end{pmatrix} = \phi_1}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}85 \end{pmatrix} =}$$

$(u_1)_0 = 1$m. $\quad (u_2)_0 = 0.$

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \phi_1\, q_1(t) + \phi_2\, q_2(t).$$

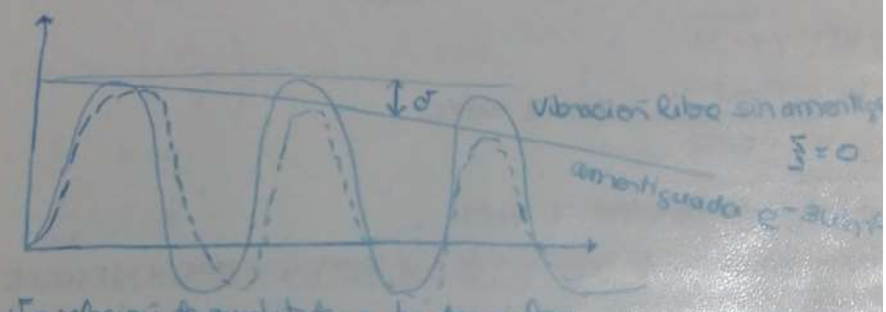
$t = q\ \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0.$

$$= \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}35 \end{pmatrix}}_{\phi_1} 0{,}578 \cdot \cos \underbrace{0{,}72}_{\omega_1} + 0{,}422 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}85 \end{pmatrix}}_{\phi_2} \cos \underbrace{20{,}86}_{\omega_2} t}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES

Asignatura PPS
Alumno
Curso Grupo Fecha

Sistema masa resorte amortiguador sometido a vibración libre
$m = 100$ Kg.
Se desplaza 2cm. ($U_0 \sim 2$cm) y se libera.
Se producen 20 ciclos $T = 4s$. y tiene una amplitud de 0,15cm.
Obtener "K" de rigidez y "C" amortiguamiento.



δ = relación de amplitudes entre dos ciclos

Decrecimiento logarítmico

$$\ln = \frac{u(t)}{u(t+d')} = 2\pi\xi\frac{w_n}{w_D} \rightarrow \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \delta$$

$$\ln = \frac{u(1)}{U_s+d} = j\delta \qquad \xi = \frac{c}{c_r} \qquad c_{cr} = \sqrt{2km} = 2mw_n$$

Sabemos que

- Factor amortiguamiento : $w_D = \frac{2\pi}{T_D}$ rad/s
- Frec. natural : $w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ rad/s

$$w_D = w_n\sqrt{1-\xi}$$

En nuestro caso tenemos

$U_{21} = 0{,}15cm$ $\quad$ $j = 20$ ciclos

$U_0 = 2cm.$ $\quad$ $\delta = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{2}{0{,}15}\right) = 0{,}13.$

$$\left[\zeta = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\delta}\right) + 1}} = 0{,}02 \right]$$

$$\left(\begin{matrix} 20 \text{ ciclos} \\ 4 \text{ seg.} \end{matrix} \right) \quad \omega_D = \frac{20 \text{ ciclos}}{4s.} \quad \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ ciclo.}} = 10\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_D = \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_n = \frac{10\pi \text{ rad/s}}{\sqrt{1-0{,}02^2}} = 31{,}42 \text{ rad/s.}$$

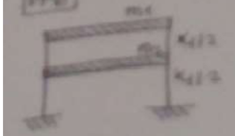
$$\omega_n = \sqrt{K/m} \longrightarrow K = 98{,}7 \text{ KN/m.}$$

$$C_{crit.} = 2m\omega_n = 2 \cdot (100Kg)(31{,}42) = 6284{,}4 \text{ N/cm}$$

$$\zeta = \frac{C}{Cr} \longrightarrow C = \zeta \cdot Cr = 0{,}02 \cdot 6284{,}4$$

$$= \boxed{\begin{matrix} 125{,}688 \text{ N/m/s} \\ \text{Kg/s.} \end{matrix}}$$

PP6



$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $|K| = \begin{vmatrix} 400 & -100 \\ -100 & 200 \end{vmatrix}$

$\omega_1 = 6{,}2\ Hz$ $P_1 = 1{,}17$

$\omega_2 = 6{,}2\ Hz$ $P_2 = 0{,}28$

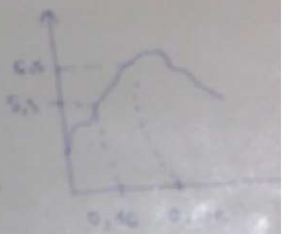
$|\Phi| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \end{vmatrix}$

1) Valores del desplazamiento máximo "u" conocido el espectro.

$u_i = P_i \cdot \Phi_i D_i$

$u_1 = 1{,}17 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \cdot 6{,}5 = \begin{cases} 1{,}605 \\ 4{,}200 \end{cases}$

$u_2 = 0{,}28 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 5{,}30 = \begin{cases} -2{,}40 \\ 1{,}484 \end{cases}$

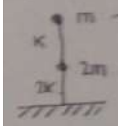


$T_2 = \frac{1}{\omega^2} = 0{,}06$

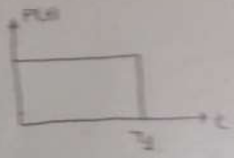
$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 0{,}16$

EX JUNIO 2015

Se encuentra sujeto a la carga



$m = 40t$
$P = 500 \text{ KN}$
$t_1 = 1s$
$K = 20.000 \text{ kN/m}$



$\omega_1 = 15{,}81 \text{ rad/s } (\sqrt{250})$
$\omega_2 = 31{,}622 \text{ rad/s } (\sqrt{1000})$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0645 & 0{,}0913 \\ 0{,}1291 & -0{,}0913 \end{bmatrix}$$

1.) Desplazamientos $u(t)$ en la fase de vibración forzada y cual tiene más peso.

Ley desplazamiento 1 GDL - $\boxed{u(t) = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t)}$

$$P_1 = (0{,}0645 \quad 0{,}1291) \begin{bmatrix} 500 \; (P_1) \\ 1000 \; (P_2 \end{bmatrix} = 161{,}35$$

$$P_2 = (0{,}0913 \quad -0{,}0913 \begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = -45{,}65$$

$$K_1 = (0{,}0645 \quad 0{,}1291) \cdot \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}0645 \\ 0{,}1291 \end{pmatrix} = 0{,}0125K$$

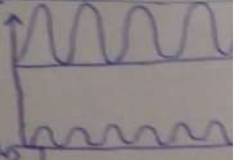
$$K_2 = (0{,}0913 \quad -0{,}0913) \cdot \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}0913 \\ -0{,}0913 \end{pmatrix} = 0{,}05K$$

$$q_1(t) = \frac{P_1}{K_1}(1-\cos\omega_1 t) = \frac{161{,}35}{0{,}0125K}(1-\cos 15{,}81\, t)$$

$$q_2(t) = \frac{P_2}{K_2}(1-\cos\omega_2 t) = \frac{-45{,}65}{0{,}05K}(1-\cos 31{,}622 t)$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}0645 \\ 0{,}1291 \end{bmatrix}}_{\phi_1} \underbrace{0{,}0645(1-\cos 15{,}81 t)}_{q_1} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}0913 \\ -0{,}0913 \end{bmatrix}}_{\phi_2} \underbrace{0{,}1826(1-\cos 3}_{q_2}$$

El primer modo tiene más importancia que el 2º modo.

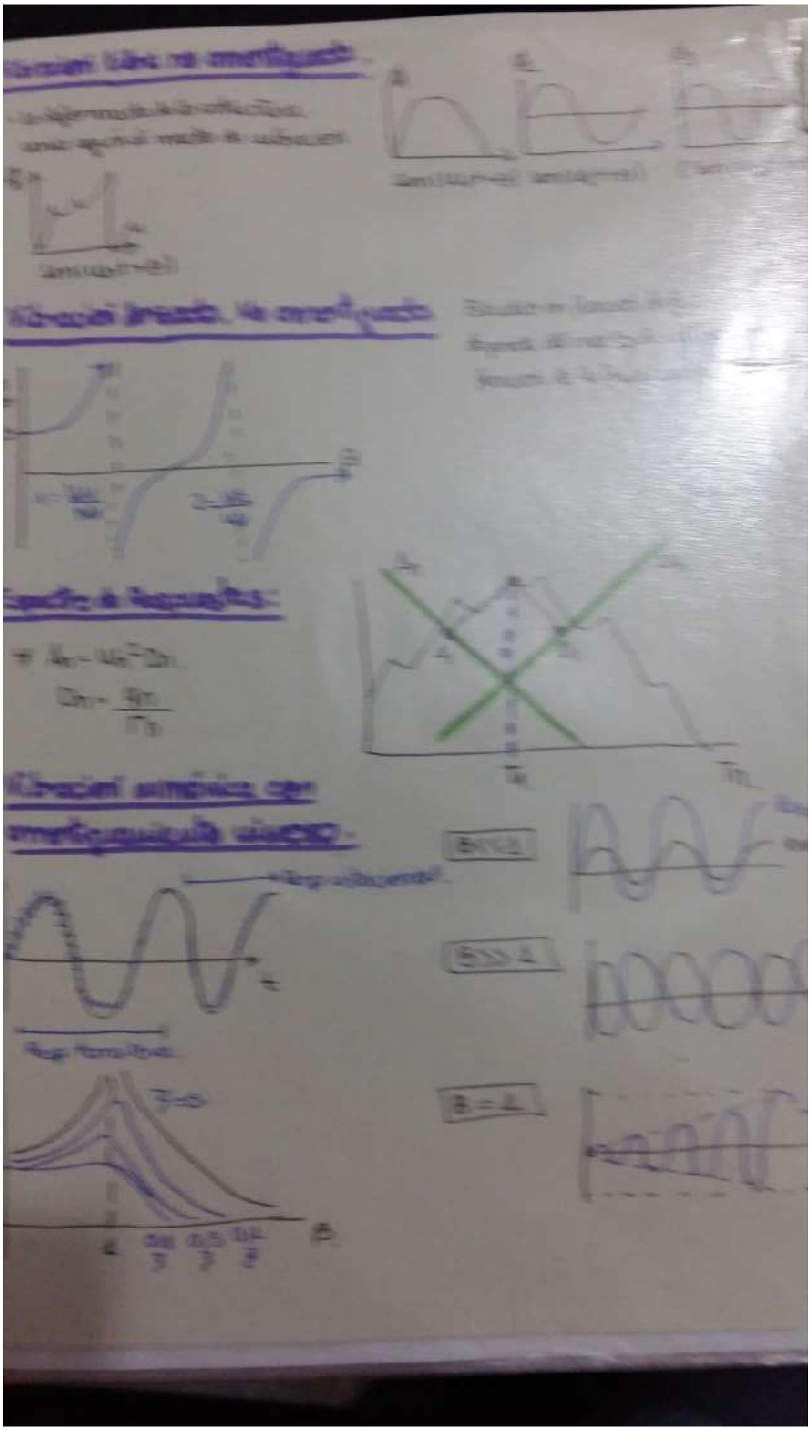


2) Fuerzas estáticas equivalentes.

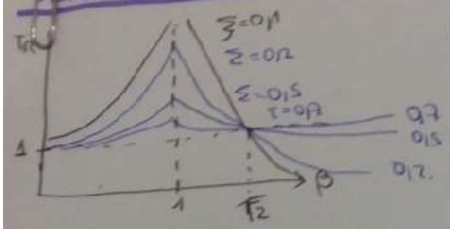
$f_{est} = K \cdot U$

$$f_{est_1} = \omega_1^2 [m]\, \phi_1 \cdot q_1 = 15{,}81^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0645 \\ 0{,}1291 \end{bmatrix} \cdot q_1(t)$$

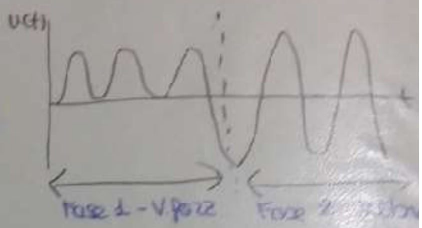
$$f_{est_2} = \omega_2^2 [m]\, \phi_2 \cdot q_2 = 31{,}66^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0913 \\ -0{,}0913 \end{bmatrix} \cdot q_2(t).$$



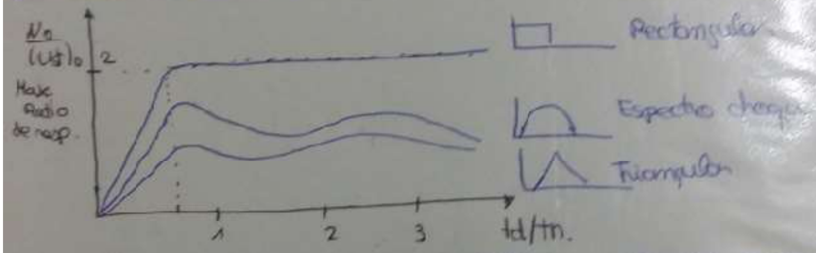
Transmisibilidad.



Carga impulsiva.

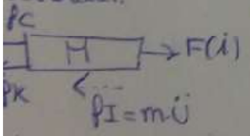


GRÁFICA RESUMEN

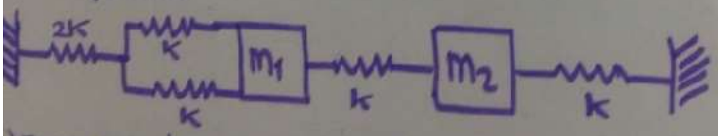


CRITERIO D'ALAMBERT: Todo cuerpo sometido a una fuerza, genera una fuerza de inercia de sentido contrario, proporcional a la masa y a la aceleración de nuestro sistema.

Ligado a las fuerzas de inercial.

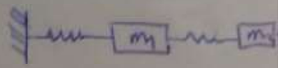


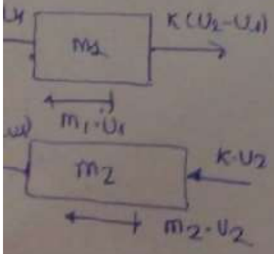
$$f_I + f_D + f_K = f(t) \rightarrow m\ddot{U} + c\dot{U} + KU = f$$



1) Ec. movimiento.

K equivalente $\rightarrow \frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{2K} + \frac{1}{(K+K)} = \frac{2}{2K} = K$





$\boxed{k(U_2-U_1) - KU_1 = m_1\ddot{U}_1}$ $\quad 2KU_1 - KU_2 \cdot m_1\ddot{U}_1 =$

$\boxed{-k(U_2) - K(U_2-U_1) = m_2\ddot{U}_2}$ $\quad -2KU_2 + KU_1 = m$

$\boxed{[m]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0}$

$$\left.\begin{matrix} m_1\ddot{U}_1 \quad 2KU_1 - KU_2 = 0 \\ m_2\ddot{U}_2 \quad KU_1 - 2KU_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad [K] = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ K & 2K \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3'2} + 0'6 + 0'5 = \boxed{4'3.}$

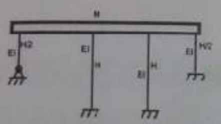
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2015-2016 **DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Final) 22_06_2016**

EJERCICIOS PRÁCTICOS: Tiempo **1h 15** minutos

PP1 (2p)

La estructura de la figura dispone de una plataforma considerada infinitamente rígida y con masa M. Todas las columnas tienen el mismo valor de EI= 6000 kN.m², y el valor de la altura H es de 4.7m. Se solicita:



1.-(0.4p)Calcular la rigidez equivalente

2.- (0.8p)Obtener el valor máximo de M para que la amplitud de desplazamiento horizontal no supere 50 mm, sabiendo que en condición de vibración libre u(0s)= 0.04 m y $\dot{u}$ (0s) =50 cm/s

3.- (0.8p)Si hay un movimiento armónico de base, tipo u(t) =0.08. sen (35 t) en m, se pide obtener el valor del factor de Transmisibilidad y el desplazamiento máximo y compararlo con el máximo de excitación.

PP2 (2.4p)

La estructura mostrada a continuación tiene las siguientes características

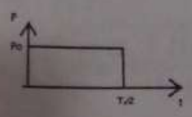
$$[K]= k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [M]= m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \Phi= \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.866 & 0 & -0.866 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

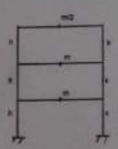
, w_1= (0.268 k/m)^0.5,

w_2= (2k/m)^0.5, w3= (3.73k/m)^0.5. Se pide:

1. (1.2p)Calcular los desplazamientos de cada plataforma cuando queda sujeta la masa del tercer nivel a una fuerza de excitación armónica, generada por un equipo rotativo, y de valor $p(t) = P_0.sen\ wt$.

2.- (1.2p)Si en lugar de la excitación anterior, en cierto momento se aplica una fuerza impulsiva en el primer nivel según la figura siguiente, calcular la ley de desplazamientos durante la fase de vibración forzada por Análisis Modal.





PP3(1.2p)

Para un sistema amortiguado, se ha comprobado que al desplazarlo de su posición de equilibrio 10mm y tras transcurrir 5.5 s y 20 ciclos, el sistema mantiene una amplitud de 0.11 cm. Si el amortiguamiento "c" = 92.5 N s/m, se pide calcular la masa del sistema.

PP4(1.4p)

Una estructura de 2 grados de libertad dispone de la siguiente matriz de rigidez

$$K = k\begin{bmatrix} 5/4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y se conoce el primer modo propio $\phi_1^T = (0.919 \quad 1)$.

1.- (0.55p)Justificar cuál sería el segundo modo entre los siguientes:

$\phi_{2a}^T = (-0.544 \quad 1)$, $\phi_{2b}^T = (1.24 \quad -1)$, $\phi_{2c}^T = (1 \quad 1.5)$, $\phi_{2d}^T = (0.244 \quad 1)$

2.- (0.85p)Calcular la ley de desplazamientos en vibración libre, sabiendo que $u(0s) = (1 \quad 2)^T$; $\dot{u}(0s) = (0 \quad 0)^T$, y la matriz de masas

$$M = m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

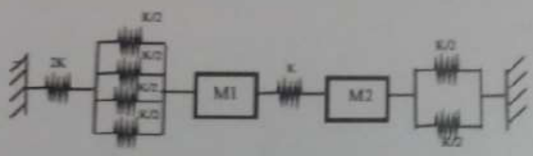
$$\phi = \begin{pmatrix} 0{,}919 & 1 \\ 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2015-2016 DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Final) 23_09_2016

EJERCICIOS TEÓRICOS: Tiempo 20 minutos

PT1 (1p): Para el sistema de la siguiente figura, se pide obtener la ecuación de movimiento, matriz de rigidez y de masas por D'Alembert



PT2 Seleccionar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta en cada situación:

1) (0.2p) Una estructura "A" que tenga una frecuencia de vibración mayor que otra "B"
   a. Tiene período propio mayor y desplazamiento mayor que la "B"
   b. A igualdad de masa M, es menos rígida la estructura "A" que la "B"
   c. A igualdad de masa M y tipo de material, la estructura "A" tendrá una inercia mayor que la "B"
2) (0.2p) En un sistema sobreamortiguado, la respuesta del sistema [illegible] posición de equilibrio y dejarlo libre:
   a. Tiene como respuesta una vibración con amplitud decreciente
   b. No vibra, vuelve a su posición de equilibrio lentamente
   c. No vibra y vuelve a su posición de equilibrio más rápidamente que en el caso de amortiguamiento crítico
3) (0.2p) Una estructura en condiciones de vibración libre amortiguada con razón de amortiguamiento menor que 1, la frecuencia propia de amortiguamiento Wd es
   a. Mayor que Wn (frecuencia propia circular)
   b. Menor que Wn
   c. Independiente de Wn.
4) (0.2p) El Período propio de una estructura depende de:
   a. Masa (M) y Rigidez (K)
   b. Masa (M) y aceleración ($\ddot{u}$)
   c. Rigidez (K) y velocidad ($\dot{u}$)

PT3 (0.7p) Para un sistema amortiguado se pide explicar de forma justificada:

- Cuando queda sometido a movimiento de base armónico, ¿cuál es el efecto del amortiguamiento en la fuerza transmitida al sistema? Explicar el efecto de variar W/W_n
- Ante una fuerza de excitación armónica con $W/W_n << 1$, explicar cuál es el parámetro más importante que afecta a la amplitud de respuesta del sistema
- Indicar el efecto del amortiguamiento cuando $W/W_n >> 1$ y cuando $W/W_n << 1$. Justificar gráficamente.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

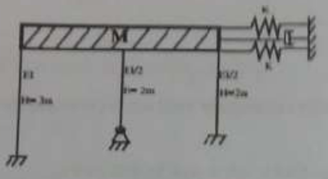
Curso 2015-2016 **DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Final) 23_09_2016**

EJERCICIOS PRÁCTICOS: Tiempo **1h 15** minutos

PP1 (2.8p)

Del siguiente sistema se conoce que la masa de la plataforma es de 19 t y se considera infinitamente rígida. Tras separarla de su posición de equilibrio y conociendo que:

$\xi = 0.25$; EI= 6000 kN.m^2; k= 1000 kN/m



Se solicita:

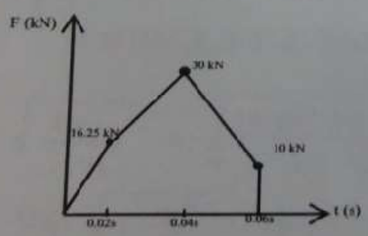
1.- (0.9p) Calcular la frecuencia de vibración amortiguada

2.- (1p) Si en t=0s, las condiciones iniciales son u(0s)= 300 mm y velocidad [illegible] obtener la amplitud, desfase y desplazamiento en t=0.8 s

3.- (0.9p) Obtener el número de ciclos que deben transcurrir para obtener una [illegible] del 40% respecto a la amplitud inicial

PP2 (2.8p)

En una fragata se produce una explosión cercana al local de equipos de control. En este local existe un equipo de medida apoyado sobre un polín con rigidez 40 kN/m y masa 150 kg. La explosión queda definida por el siguiente espectro de fuerza



Se pide:

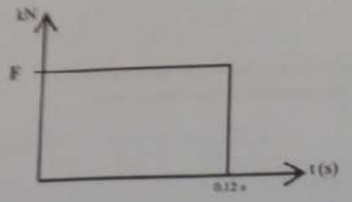
1.- (0.9p) Obtener el desplazamiento máximo de la estructura de soporte (asumir que el polín no tiene masa propia). Justificar decisiones.

2.- (1.1p) Para el buen funcionamiento del equipo, la deformación máxima no debe superar los 200 mm. Justificar qué opción sería más efectiva:

a) aumentar la masa hasta 700 kg

D) aumentar la rigidez del polín hasta 100 kN/m

3.- (0.8p) Si la carga impulsiva fuera del siguiente tipo, justificar el valor de F para que el desplazamiento máximo en la fase de vibración libre no supere los 200 mm

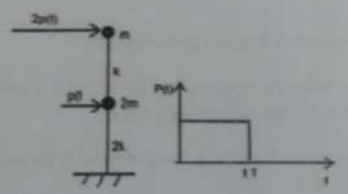


PP3 (1.9p)

La estructura de la figura queda sujeta a la carga rectangular indicada a continuación. Se conocen los siguientes datos

m= 40 t, p= 500 kN, t_1= 1s, k= 20000kN/m, w_1= 15.81 rad/s; w_2= 31,622 rad/s;

$$\phi = \begin{bmatrix} 0.0645 & 0.0913 \\ 0.1291 & -0.0913 \end{bmatrix}$$



$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$$

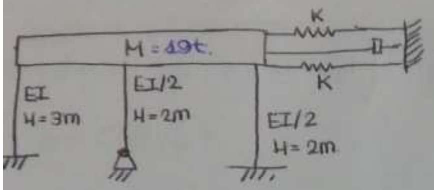
Se solicita:

1.- (1p) En la fase de vibración forzada, obtener mediante análisis modal, la ley de desplazamientos u(t). Justificar la importancia de cada modo en el resultado final

2.- (0.9p) Obtener las fuerzas estáticas equivalentes.

Asignatura PP1 (Sept. 2016)
Alumno ....n.º..............
Curso ....Grupo ...... Fecha ....

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES



$\zeta = 0{,}25$
$EI = 6000\ KN \cdot m^2$
$K = 1.000\ KN/m$

-) Frecuencia vibración amortiguada

$$K_{eq} = K_1 + K_2 + K_3$$

$$K_1 = \frac{12EI}{3^3} = \frac{12 \cdot 6.000 \cdot 10^3}{27} = 2666666{,}67\ N/m$$

$$K_2 = \frac{3 \cdot \frac{EI}{2}}{2^3} = \frac{3 \cdot 3000}{8} = 1.125\ KN/m$$

$$K_3 = \frac{12\ \frac{EI}{2}}{2^3} = 4.500\ Kn/m$$

$$K_{eq} = 2666{,}67 + 1.125 + 4.500 = 8291{,}67\ Kn/m$$

$$K_{eq} = 8291{,}67\ Kn/m + K_4 + K_5$$
$$= 8291{,}67 + 1.000 + 1.000 = \boxed{10.291{,}67\ Kn/m}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{10.291{,}67 \cdot 10^3}{19 \cdot 10^3}} = \sqrt{\frac{10.291{,}67}{19}} = 23{,}27\ rad$$

$$w_0 = w_1 \cdot \sqrt{1-\zeta^2} = 23{,}27 \cdot \sqrt{1-0{,}25^2} = \boxed{22{,}53\ rad/s}$$

2) $t = 0 s$, $u(0 s) = 300 mm$.
$v(t = 0 s) = 2 m/s$.

Obtener amplitud, desfase y desplazamiento en $t = 0,8 s$

$$\rho = \sqrt{0,3^2 + \left(\frac{2 \cdot 0,25 \cdot 23,27 \cdot 0,3}{22,53}\right)^2} = 0,3376 \, m = 337,64 \, mm.$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{2 + 0,3 \cdot 0,25 \cdot 23,27}{22,53 \cdot 0,3}\right) = tg^{-1}(0,5541) = tg^{-1} \, 31,75 =$$
$$= 1,385 \, rad$$

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_D t - \theta)$$

$$= e^{-0,25 \cdot 22,53 \cdot 0,8} \cdot \cos(22,53 \cdot 0,8 - 1,385)$$

$$= 0,01104 \cdot 0,337 \cdot (-0,604) = 2,247 \cdot 10^{-3} \, m.$$

$$\boxed{2,247 \, mm}$$

) Número de ciclos que deben de transcurrir para obtener una amplitud del 40% respecto a la original

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2} \frac{u_2}{u_3} \cdots \frac{u_j}{\quad} = e^{j\delta}$$

$$\ln \frac{u_1}{u_{j+1}} = j\delta \longrightarrow \frac{1}{j_{40\%}} \ln \frac{u_1}{u_{j+1}} = 2\pi\zeta$$

amplitud original

$$j_{40\%} = \frac{\ln u_1/u_{j+1}}{2\pi\zeta} = \frac{\ln \frac{1}{0,4}}{2\pi \cdot \zeta} = \frac{0,91629}{2\pi \cdot 0,25} = 0,5833$$

$$\boxed{\text{ciclos } 0,5833}$$

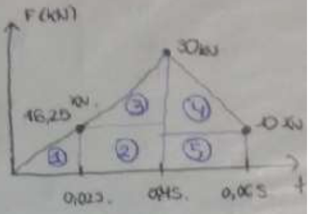
Asignatura PP2. SEPT.16

Alumno .... n.º ....

Curso .... Grupo ...... Fecha ....

SCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES

Equipo de medida sobre un polín de $K = 40\ kN/m$.
$m = 150\ kg$.



Obtener desplazamiento máximo de la estructura de soporte.
(asumir que el polín no tiene masa propia).

$$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0,06}{T_n}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 10^3}{150}} = 16,33\ rad/s$$

$$T_n = \frac{2\pi}{16,33} = 0,385\ s.$$

$$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0,06}{0,385} = 0,1559\ s < 0,25 \longrightarrow \underline{\text{pulso corto}}$$

$$\int F(t)\, dt = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$= \frac{0,02 \cdot 16,25}{2} + 0,02 \cdot 16,25 + \frac{0,02 \cdot (30 - 16,25)}{2} + \frac{0,02 \cdot 20}{2} +$$

$$= 0,1625 + 0,325 + 0,1375 + 0,2 + 0,2$$

$$= 1,025\ W/S.$$

$$\frac{I}{m\omega_n} = \frac{I}{K} \cdot \frac{2\pi}{T_n} = \frac{1,025 \cdot 2\pi}{40 \cdot 0,385} = 0,418\ m.$$

2) Para el buen funcionamiento, la deformación ≤ 200 mm.

OPCIÓN A. aumentar la masa hasta 700 kg.

$$\frac{t_1}{t_n} = \frac{0,06}{t_n} \qquad t_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$\omega_n' = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{40.000}{700}} = 7,56 \text{ rad/s}$$

$$t_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{7,56} = 0,831 \text{ s}$$

$$\frac{t_1}{t_n} = \frac{0,06}{0,831} = 0,072 < 0,25. \quad \text{Pulso corto}$$

$$u_0 = \frac{I}{m\cdot\omega_n} = \frac{I}{K}\cdot\frac{2\pi}{T_n} = \frac{1,025}{40}\cdot\frac{2\pi}{0,831} = \frac{6,44}{\cancel{...}} = 0,$$

OPCIÓN B. aumentar la rigidez del palin hasta 100 kN.

$$\frac{t_1}{t_n} = \frac{0,06}{t_n} \qquad t_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$\omega_n'' = \sqrt{\frac{100.000}{150}} = 25,82 \text{ rad/S.}$$

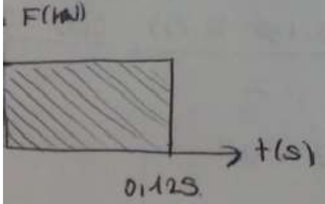
$$t_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{25,82} = 0,243 < 0,25 \quad \text{pulso corto}$$

$$U_0 = \frac{I}{m\cdot\omega_n} = \frac{I}{K}\cdot\frac{2\pi}{T_n} = \frac{1,025}{100}\cdot\frac{2\pi}{0,243} = \frac{6,44}{24,3} = 0,$$

NOS pasamos de 200 mm. de deformación luego no nos vale

OPCIÓN A la más correcta.

Si hubiera una carga impulsiva del siguiente tipo calcular F para que el desplazamiento en la fase de vibración libre ≤ 200 mm.



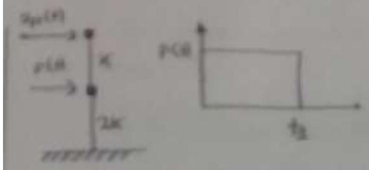
$$\frac{U_0}{U_{st}} = 2\cdot \text{sen}\frac{\pi t_1}{T_n} \rightarrow u_0 = \frac{2P_0}{k}\cdot\text{sen}\frac{\pi t_1}{t_n}$$

$$\frac{0,2\cdot 40.000}{2\cdot \text{sen}\,\pi\frac{t_1}{t_n}} = P_0.$$

$$P_0 = \frac{0,2\cdot 40.000}{2\cdot\text{sen}\,\pi\cdot\frac{0,12}{0,385}} = 4818,99 \text{ N} = \boxed{4,}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES

Asignatura: PP3
Alumno:
Curso: Grupo: Fecha:



$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$

$\Phi = \begin{bmatrix} 0,0645 & 0,0913 \\ 0,1291 & -0,0913 \end{bmatrix}$

$m = 40t$ $\quad K = 20.000\ kN/m$

$p = 500kN$ $\quad \omega_1 = 15,81\ rad/s$

$t_1 = 4\ s$ $\quad \omega_2 = 34,622\ rad/s$

1.) En vibración forzada, obtener por análisis modal, [illegible]

$u(t) = \frac{P_0}{K}(1 - \cos \omega t)$

$P_1 = (0,0645 \quad 0,1291) \begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = 161,35$

$P_2 = (0,0913 \quad -0,0913) \cdot \begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = -45,65$

$K_1 = (0,0645 \quad 0,1291) \cdot \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0645 \\ 0,1291 \end{pmatrix} = 0,0125K$

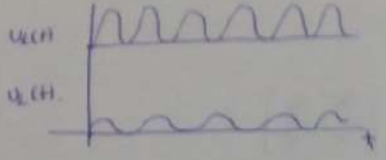
$K_2 = (0,0913 \quad -0,0913) \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0913 \\ -0,0913 \end{pmatrix} = 0,05K$

$q_1(t) = \frac{P_1}{K_1}(1 - \cos \omega_1 t) = \frac{161,35}{0,0125K} \cdot (1 - \cos(15,81 t))$

$q_2(t) = \frac{P_2}{K_2}(1 - \cos \omega_2 t) = \frac{-45,65}{0,05K} \cdot (1 - \cos(34,622 t))$

$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0645 \\ 0,1291 \end{Bmatrix} 0,6454 \cdot (1 - \cos 15,81 t) - \begin{Bmatrix} 0,0913 \\ -0,0913 \end{Bmatrix} 0,0456$

El primer modo tiene más importancia que el 2º modo



2) Obtener las fuerzas estáticas equivalentes

$$f_{est_1} = \omega_1^2 \, [M] \cdot \phi_1 \cdot q_1$$

$$= 15{,}81^2 \cdot \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}0695 \\ 0{,}1201 \end{bmatrix} \cdot q_1(t)$$

$$=$$

$$f_{est_2} = \omega_2^2 \, [M] \cdot \phi_2 \cdot q_2$$

$$= 31{,}622^2 \cdot \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0913 \\ -0{,}0913 \end{bmatrix} \cdot q_2(t)$$

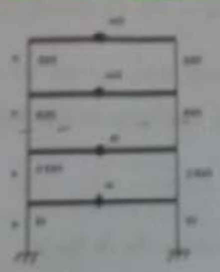
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2015-2016 DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Final) 22_06_2016

EJERCICIOS TEÓRICOS: Tiempo 25 minutos

PT1 (1.3p)

Obtener las matrices de masa [M] y rigidez [K] del siguiente sistema representado en la figura, mediante la técnica de los coeficientes de influencia. Justificar y apoyar con gráficos.

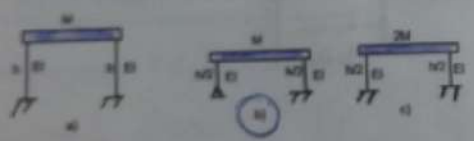


PT2 (0.6p)

Dado un sistema amortiguado sometido a vibración libre, indicar [illegible] se obtiene cuando $\xi < 1$. ¿Qué efecto tendrá reducir el parámetro ξ? Justificar y mostrar el efecto mediante representación gráfica.

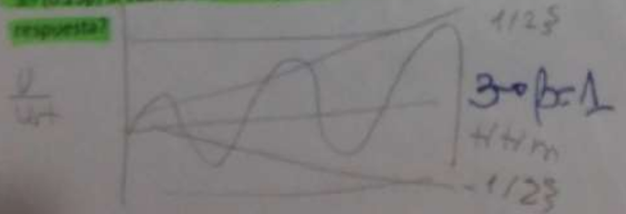
PT3 (1.1p)

1.- (0.5p) Justificar cuál de los siguientes sistemas, ante un movimiento de base, entrará antes en resonancia



2.- (0.35p) Si al sistema b) se incorpora un amortiguamiento "c" y la $W_{exc} > W_{propia}$, ¿la fuer[za] transmitida es siempre menor que en la situación de origen?. Justificar gráficamente

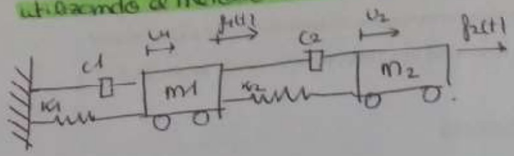
3.- (0.25p) Si cuando W_{exc} es aprox = W_{propia} se aumenta la razón de amort ξ, ¿Cuál será l[a] respuesta?



1/2ξ

3 → β = 1

PT1. Formular la ecuación de movimiento para el sistema amortiguado siguiente utilizando el método de d'Alembert



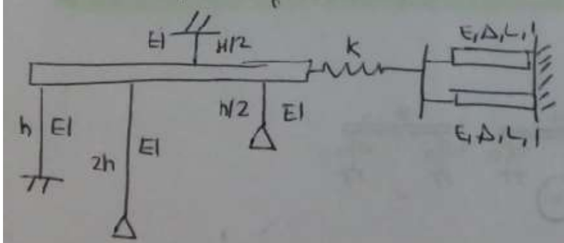
PT2. sistema sujeto a vibración libre ¿cual sería el efecto de aumentar el valor de δ cuando el sistema tiene una razón de amortiguamiento $\xi > 1$

b) Para un sistema sometido a excitación armónica con $\omega/\omega_n >> 1$ justificar y explicar cual es el parámetro mas efectivo a modificar si los resultados no son aceptables

c) En una estructura amortiguada sometida a movimiento de base, indicar si la fuerza transmitida aumenta, disminuye o no tiene ningún efecto al aumentar la razón de amortiguamiento.

PT3

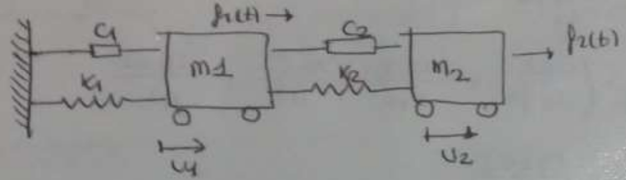
Calcular la rigidez equivalente del siguiente sistema



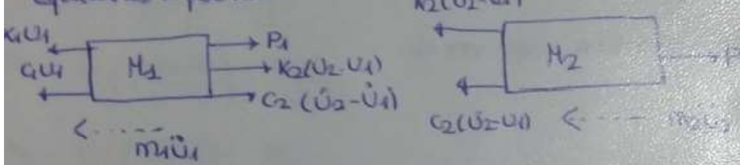
Asignatura ....
Alumno .... n.º ....
Curso .... Grupo ...... Fecha ....

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES

PT1 Formulación la ecuación de movimiento para el sistema amortiguado siguiente utilizando el método d'Alembert



Equilibrio de fuerzas



- $m_1\ddot{u}_1 + (c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1+k_2)u_1 - k_2 u_2 = P_1$
- $m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + k_2 u_2 - k_2 u_1 = P_2.$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = [m] \qquad \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} = [C] \qquad \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

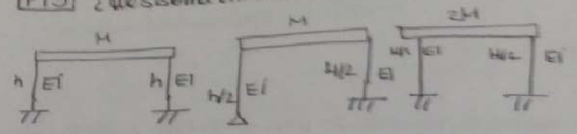
$$\boxed{m\ddot{U} + C\dot{U} + 3KU = F(t).}$$

Frecuencias propias: $|K - \omega^2 m| = 0.$

$$\left| \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 m & 0 \\ 0 & \omega^2 m \end{bmatrix} \right| = 0 \rightarrow \left| \begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{bmatrix} \right.$$

Resolviendo. $\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{3k}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{k/m} \end{aligned}$

PT3 ¿Qué sistema entrará antes en resonancia? w=wn.



$$K_{eq1} = 2\cdot\left(\frac{12EI}{H^3}\right) = \frac{24EI}{H^3}$$

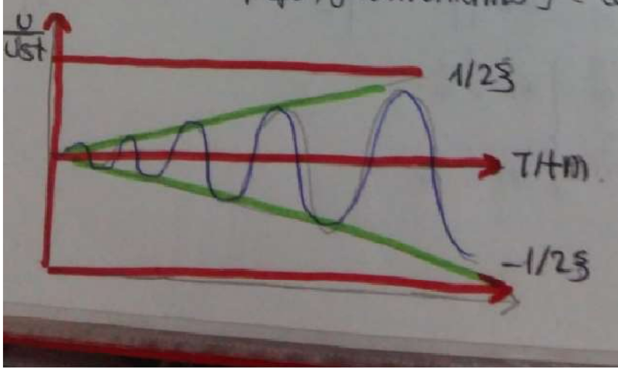
$$K_{eq.2} = \left(\frac{3EI}{(H/2)^3}\right)+\left(\frac{12EI}{(H/2)^3}\right) = \frac{24EI}{H^3}+\frac{96EI}{H^3} = \frac{120EI}{H^3}$$

$$K_{eq3} = 2\cdot\left(\frac{12EI}{(H/2)^3}\right) = \frac{192EI}{H^3}$$

El sistema que antes entrará en resonancia

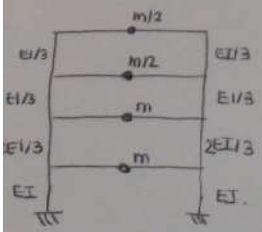
Si al sistema b) se incorpora un amortiguamiento "c" y la ...
¿La fuerza transmitida es siempre menor que en la situa...

Si cuando Wexcit = Wpropio, y aumentamos ξ = cual será la re...



Teoría Junio 2016.

PT1



· Obtener las matrices de masa [M] y [K] mediante los coef. de influencia. Justificar y apoyar con gráficos.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = m \\ m_2 = m \\ m_3 = m/2 \\ m_4 = m/2. \end{array}\right\} \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & m/2 & \\ & & & m/2 \end{bmatrix}$$

Matriz de masas

Matriz de rigidez

$$K_1 = 2\cdot\left(\frac{12EI}{h^3}\right) = \frac{24EI}{h^3}$$

$$K_2 = 2\cdot\left(\frac{12(2EI)}{H^3\cdot 3}\right) = \frac{16EI}{h^3}$$

$$K_3 = 2\cdot\left(\frac{12EI}{3h^3}\right) = \frac{8EI}{h^3}$$

$$K_4 = 2\cdot\left(\frac{12EI}{3h^3}\right) = \frac{8EI}{h^3}$$

Matriz K

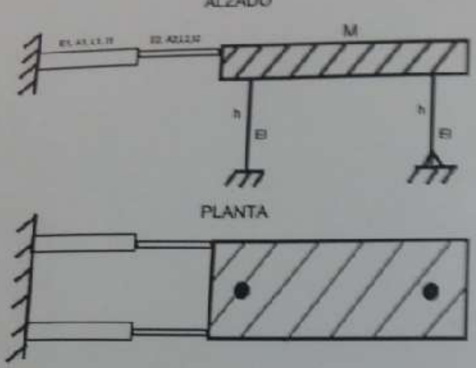
$$K = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_2+K_3 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_3+K_4 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_4 \end{bmatrix}$$

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2014-2015 DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Examen Final Junio) 26_06_2015

PARTE TEÓRICA: BLOQUE 1º (Nota sobre total: 3/20)

PT1. (1.5p)-Definir la ecuación de movimiento y la rigidez equivalente del siguiente sistema. Considerar la masa concentrada en la plataforma, que se asume rígida.



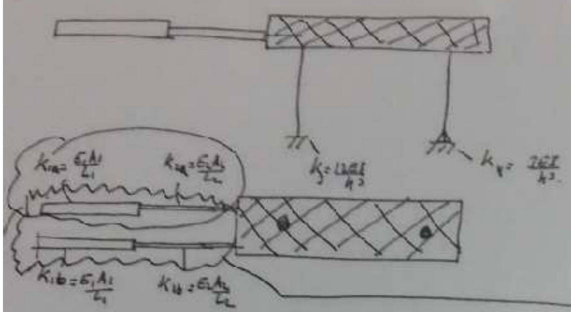
PT2.- En un sistema amortiguado sometido a vibración armónica, explicar (también gráficamente):

1) (0.5p) Efecto del amortiguamiento cuando $W/W_n << 1$; $W/W_n >> 1$; $W/W_n = 1$
2) (0.5p) Parámetro más importante que afecta a la amplitud de respuesta cuando $W/W_n << 1$
3) (0.5p) Ante movimiento de base armónico, explicar el efecto del amortiguamiento en la fuerza transmitida al sistema (explicar en función de la relación W/W_n).

26/JUNIO 2015

PT1

BLOQUE 1 PARTE TEORÍA



$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{\frac{E_1A_1}{L_1}} + \frac{1}{\frac{E_2A_2}{L_2}} = \frac{\frac{E_2A_2}{L_2} + \frac{E_1A_1}{L_1}}{\frac{E_1A_1}{L_1}\cdot\frac{E_2A_2}{L_2}} \rightarrow k_{eq} = \frac{E_1A_1E_2A_2}{L_1L_2\left(\frac{E_2A_2}{L_2} + \frac{E_1A_1}{L_1}\right)}$$

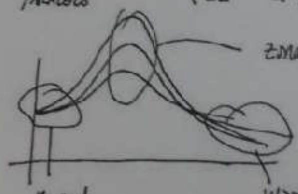
EN PARALELO

$$K'_{eq} = 2k_{eq} = \frac{2E_1A_1E_2A_2}{L_1L_2\left(\frac{E_2A_2}{L_2} + \frac{E_1A_1}{L_1}\right)}$$

$$\text{TOTAL} \rightarrow \underbrace{k'_{eq}}_{\text{PARALELO}} + k_3 + k_4 = \frac{2E_1A_1E_2A_2}{L_1L_2\left(\frac{E_2A_2}{L_2} + \frac{E_1A_1}{L_1}\right)} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{3EI}{h^3}$$

PT2

1)



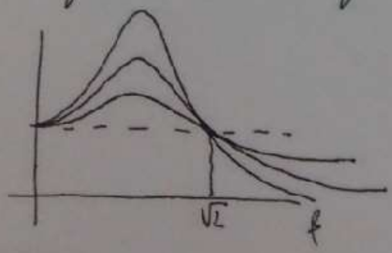
ZONA $w \simeq 1$ → SÍ INFLUYE el cambio de ζ. A mayor ζ menor amplitud.

$w \ll 1$ poca influencia el cambio de ζ

$w \gg 1$ → poca influencia de cambio de ζ

2) Parámetro fundamental ⇒ "k" rígidez

3)



1) Si $\frac{w}{w_n} > \sqrt{2}$ → a mayor ratio amortig → Fuerza transmitida

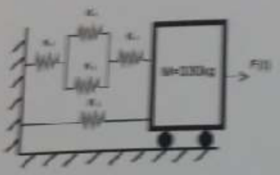
2) Si $\frac{w}{w_n} < \sqrt{2}$ → a mayor ratio amortig ⇒ → menor Fuerza transmitida.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2014-2015 DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Examen Final Junio) 26_06_2015

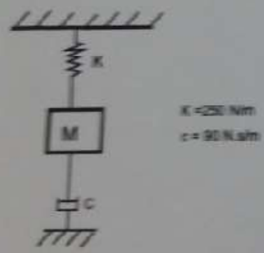
EJERCICIOS PRÁCTICOS: BLOQUE 1º (Nota sobre total: 7/20)

PP1.- Una máquina con masa 330 kg se encuentra conectada a una pared rígida según la figura. Si la máquina está sometida a una fuerza F(t) armónica de amplitud máxima 20 kN y frecuencia 1 Hz, se pide:



1) (1.3p) Obtener K_0 para que el desplazamiento máximo en operación no supere [illegible]
2) (0.7p) Calcular la fuerza transmitida a la pared

PP2.- Un objeto de masa M= 10 kg está suspendido como en la figura. Se pide:



1) (0.5p) Calcular el coeficiente de amortiguamiento crítico
2) (0.6p)La frecuencia propia y razón de amortiguamiento
3) (0.9p)Deducir cuántos ciclos pasarán para reducir la amplitud hasta el 40% de la amplitud inicial

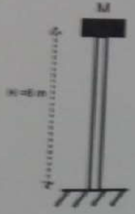
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

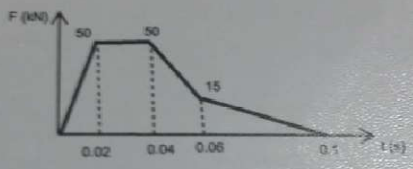
Curso 2014-2015 DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Examen Final Junio) 26_06_2015

PP3.- Una torre como la de la figura, con una masa concentrada en la parte superior queda expuesta a una carga impulsiva como la indicada en la figura. Conociendo que la frecuencia propia es de 0.5 s y la rigidez es 500 kN/m, Se pide calcular:

1) (1.5p) La fuerza cortante y momento flector en la base

2) (1.5p) Si el momento flector supera el valor admisible, justificar qué opción será mejor: a) aumentar la masa un 10%, o b) aumentar la rigidez un 15%.





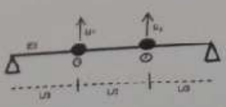
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2014-2015 DINÁMICA DE ESTRUCTURAS (Examen Final Junio) 26_06_2015

EJERCICIOS PRÁCTICOS: BLOQUE 2º (Nota sobre total: 10/20)

PP1.- Para la estructura de la figura se conocen los siguientes datos

$$K = \frac{12EI}{5L^3}\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \qquad M = \frac{mL}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



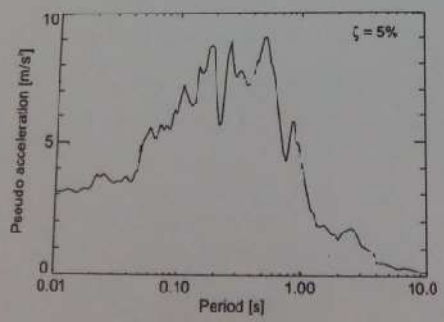
1) (2p) Obtener las frecuencias propias.
2) (2p) Obtener, por análisis modal, los desplazamientos cuando existe una carga en nodo 1: P_1= 100 sen 25 t. Los modos propios son conocidos ϕ_1^T=(1 1), ϕ_2^T=(1 -1).
3) (2p) Obtener la ley de desplazamientos, considerando razones de amortiguamiento del 10% en el sistema. Resolver considerando que W_1= 10 rad/s, W_2=38.7 rad/s, EI/L^3=0.89

PP2.-Un sistema con ξ= 5% está definido por los siguientes parámetros. Si se encuentra sometido a un movimiento de base cuyo espectro viene indicado en la figura de más abajo, se pide:

$$K = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} kg/s^2 \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} kg \quad T_1 = 1.02s;\ T_2 = 0.39s; \quad \phi = \begin{bmatrix} 1 & -0.618 \\ 0.618 & 1 \end{bmatrix};$$

$\Gamma_1 = 1.17$ $\Gamma_2 = 0.28$; altura de cada columna h=2m

1) (0.3p) Ecuación de movimiento, teniendo en cuenta los parámetros arriba definidos
2) (2p) Obtener los desplazamientos máximos "u" en base al espectro de más abajo. Mostrar gráficamente el resultado debido a cada modo.
3) (1.7p) Obtener el valor de la fuerza cortante en la base debido a cada modo

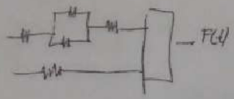


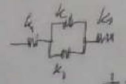
Bloque 1:

55'

26/Junio/2015

PP1



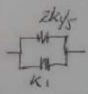


$=$

$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{k_1} = \frac{2}{k_1} + \frac{1}{2k_1} = \frac{4+1}{2k_1}$

$k_{eq} = \frac{2k_1}{5}$

1)



$k'_{eq} = \frac{2k_1}{5} + k_1 = \frac{7k_1}{5}$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k'_{eq}}{m}} \rightarrow \omega_1^2 = \frac{k'_{eq}}{m} \rightarrow \omega_1^2 m = k'_{eq} \Rightarrow \omega_1^2 \cdot 330 = \frac{7k_1}{5}$

$\omega_{exc.} = 2\pi f = 2\pi \cdot 1\,Hz = 2\pi$ rad/s

$U_{máx} = U_{st} \cdot D = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} = \frac{20000}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{\left(1-\left[\frac{\omega}{\omega_1}\right]^2\right)} = \frac{6}{100}$

$u(t) = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)}(\sin\omega t - \beta \sin\omega_n t)$

amplitud: $\frac{P_0}{k(1-\beta^2)}$

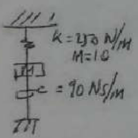
$\frac{20000}{\omega_1^2 \cdot 330\left[1-\frac{4\pi^2}{\omega_1^2}\right]} = 0{,}06 \rightarrow \boxed{\omega_1 = 32{,}4 \text{ rad/s}}$

$k'_{eq} = \omega_1^2 m = 32{,}4^2 \cdot 330 = 346{,}4 \ldots$

$k_1 = \frac{5}{7} k'_{eq} = \frac{5}{7} \cdot 346{,}4 = 247{,}4 \ldots$

2) $u_{máx} = u_{st} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)} = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)}$ $\rightarrow F_{máx} = k\,u_{máx} = \frac{P_0}{\cancel{k}} \cancel{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} = 20000 \frac{1}{\left(1-\left[\frac{2\pi}{32{,}4}\right]^2\right)}$

2



1) Coef. amort. crítico. $c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{250 \cdot 10} = 100 \frac{N \cdot s}{m}$

2) $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{250}{10}} = 5$ rad/s

$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{90\ N \cdot s/m}{100\ N \cdot s/m} = 0{,}9$

3) $\frac{1}{j_{40\%}} \ln\left(\frac{u_j}{u_{j+1}}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow j_{40\%} = \frac{\ln\left(\frac{1}{0{,}4}\right) \cdot \sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi}$

$j_{40\%} = \ln\frac{1}{0{,}4} \cdot \frac{\sqrt{1-0{,}9^2}}{2\pi \cdot 0{,}9} \Rightarrow$

$j_{40\%} = 0{,}916 \cdot 0{,}0771 = \underline{0{,}0706 \text{ ciclos}}$

Asignatura ....
Alumno .... n.º ....
Curso .... Grupo ..... Fecha ....

ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES

BLOQUE 1

26/Enero/2015

P13

$T_n = 0{,}5\,s$

1) FC & MF base

$t_1 = \frac{0{,}1}{0{,}5} < 0{,}25$ Pulso Corto.

$u_0 = \frac{I \cdot 2\pi}{k \cdot T_n} = \frac{2{,}45 \cdot 2\pi}{k \cdot 0{,}5} = \frac{2{,}45 \cdot 2\pi}{500 \frac{kN}{m} \cdot 0{,}5} \, kN \cdot s = 0{,}0615\,m = 61{,}5\,mm$

$F_{st} : k u_0 = 500 \frac{kN}{m} \cdot 0{,}0615 = 30{,}75\,kN$

$FC = 30{,}75\,kN$

$MF = 30{,}75 \cdot 6 = 184{,}75\,kN \cdot m$

2) a) $m_2 = 1{,}1\,m_1 \rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{\frac{k_1}{1{,}1 m_1}}{\frac{k_1}{m_1}}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}10}} = 0{,}949; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi/\omega_2}{2\pi/\omega_1} = \frac{1}{0{,}949}$ 1,0537

$T_2 = 1{,}0537 \cdot T_1 = 0{,}52685$

$u_0 = \frac{2{,}45 \cdot 2\pi}{500 \cdot 0{,}52685} = 0{,}0584\,m = 58{,}4\,mm$; $F = 500 \cdot 0{,}0584 = 29{,}2\,kN$

$MF = 175{,}2\,kN \cdot m$

b) $K_2 = 1{,}15\,k_1$

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{1{,}15}} \Rightarrow T_2 = 0{,}9325\,T_1 = 0{,}466$

$u_0 = \frac{2{,}45 \cdot 2\pi}{575 \cdot 0{,}466} = 0{,}0574$; $F = 575 \cdot 0{,}0574 = 33{,}01$

$575 = 1{,}15 \times 500$

$MF = 33{,}01 \cdot 6 = 198\,kN$

Asignatura ....
Alumno .... n.º ....
Curso .... Grupo ...... Fecha ....

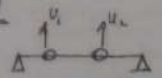
ESCUELA TECNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS NAVALES

26/06/2015

55'

BLOQUE 2:

PP1



1) Frecuencias y modos propios

$$\det |[K] - w^2[M]| = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{12EI}{5L^3}}_{k} \rightarrow \begin{vmatrix} 8k - w^2 m & -7k \\ -7k & 8k - w^2 m \end{vmatrix} = (8k - w^2 m)(8k - w^2 m)$$

resolviendo: $\left.\begin{matrix} w_1^2 = 15\frac{k}{m} \\ w_2^2 = k/m \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} w_1 = \sqrt{\frac{15k}{m}} \\ w_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{matrix}$

2) Por análisis modal → desplazamientos cuando en nodo 1 hay carga $P_1 = 100 \operatorname{sen} 25t$

$$M_n \cdot \ddot{q}_n + K_n q_n = P_{n0} \operatorname{sen} wt \; ; \; P_{n0} = \phi_n^T P_0 = 100$$

$P_{1,0} = \phi_1^T P_0 = 100$

$P_{1,0} = (1\ 1)\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = 100$

$$q_n(t) = \frac{P_{n0}}{K_n} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \operatorname{sen} wt$$

$$q_1(t) = \frac{100}{K_1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{25}{\sqrt{\frac{15k}{m}}}\right)^2} \cdot \operatorname{sen} 25t$$

$$K_1 = (1\ 1)\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{12EI}{5L^3} = \frac{12EI}{5L^3}(1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{12EI}{5L^3} \cdot 2 = \frac{24EI}{5L^3} \Rightarrow q_1(t) = \frac{100 \cdot 5L^3}{24EI} \ldots$$

$$K_2 = (1\ -1)\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{12EI}{5L^3} = \frac{12EI}{5L^3}(1\ -1)\begin{pmatrix} 15 \\ -15 \end{pmatrix} = \frac{12EI}{5L^3} \cdot 30 = \frac{12EI \cdot 6}{L^3} \Rightarrow q_2(t) = \frac{100 \cdot L^3}{12EI \cdot 6} \ldots$$

$$u = \phi q \equiv \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - q_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \left[\frac{500L^3}{24EI} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{25}{\sqrt{\frac{15k}{m}}}\right)^2} + \frac{100L^3}{72EI} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{25}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)^2}\right] \cdot \operatorname{sen} \ldots \\ \left[\frac{500L^3}{24EI} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{25}{\sqrt{\frac{15k}{m}}}\right)^2} - \frac{100L^3}{72EI} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{25}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)^2}\right] \cdot \operatorname{sen} \ldots \end{cases}$$

3) $\xi = 0{,}1$

$$q_n(t) = \frac{P_n}{K_n}\left[\frac{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi_n \frac{w}{w_n}\right)^2} \operatorname{sen} wt + \frac{-2\xi_n \frac{w}{w_n}}{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + \left[2\xi \frac{w}{w_n}\right]^2} \cdot \cos wt\right]$$

$w_1 = 10$ rd/s
$w_2 = 35{,}7$ rd/s
$EI/L^3 = 9{,}69$

$$q_1(t) = \frac{100 \cdot 5L^3}{24EI}\left[\frac{1 - \left(\frac{25}{10}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{25}{10}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{25}{10}\right)^2} \operatorname{sen} 25t - \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}5}{\left(1 - 2{,}5^2\right)^2 + \left(2 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}5\right)^2} \cdot \cos \ldots\right.$$

$$q_2(t) = \frac{100 \cdot L^3}{72EI}\left[\frac{1 - (25/35{,}7)^2}{\left(1 - \left(\frac{25}{35{,}7}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{25}{35{,}7}\right)^2} \cdot \operatorname{sen} 25t - \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 25/35{,}7}{\left(1 - \left(\frac{25}{35{,}7}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot 0{,}1 \cdot \ldots\right.}\right.$$

$$u = \phi q = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(t) + q_2(t) \\ q_1(t) - q_2(t) \end{pmatrix}$$ → se sustituye lo obtenido previamente

$K=\begin{bmatrix}100 & -100\\ -100 & 200\end{bmatrix}$ kg/s² $\qquad T_1 = 1{,}02$ s $\qquad T_2 = 0{,}39$ s $\qquad \phi=\begin{bmatrix}1 & -0{,}618\\ 0{,}618 & 1\end{bmatrix}$; $\Gamma_1 = 1{,}17$; $\Gamma_2 = 0{,}28$

$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ kg

$\xi = 5\%$

movimiento: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}100 & -100\\ -100 & 200\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\{\ddot{u}_g(t)\}$

máximos

$\{u\} = \Gamma_i \phi_i D_i \rightarrow$ pseudo desplazamiento

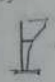
$A_i = \omega_i^2 \cdot D_i \rightarrow D_i = \frac{A_i}{\omega_i^2}$ — pseudo aceleración

$\{u\} = \Gamma_i \cdot \phi_i \cdot \frac{A_i}{\omega_i^2}$

$= 4{,}25$ m/s²

$= 7{,}3$ m/s²

$u_{1\,max} = \Gamma_1 \phi_1 \frac{A_1}{\omega_1^2} = 1{,}17\begin{pmatrix}1\\ 0{,}618\end{pmatrix}\frac{4{,}25}{6{,}2^2} = 0{,}1293\begin{pmatrix}1\\ 0{,}618\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}1293\\ 0{,}08\end{pmatrix}$ m



$u_1^1 = 129$ mm

$u_2^1 = 80$ mm

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{1{,}02} = 6{,}2$ Hz

$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{0{,}39} = 16{,}1$ Hz

$u_{2\,max} = \Gamma_2 \phi_2 \frac{A_2}{\omega_2^2} = 0{,}28\begin{pmatrix}-0{,}618\\ 1\end{pmatrix}\frac{7{,}3}{16{,}1^2} = \begin{pmatrix}-0{,}00\ldots\\ 0{,}00\ldots\end{pmatrix}$ m

$u_1^2 = -4{,}8$ mm

$u_2^2 = 7{,}9$ mm

Cálculo de la fuerza cortante

Método 1:

$F^1 = [K]\, u_{max}^{(1)} = \begin{bmatrix}100 & -100\\ -100 & 200\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0{,}1293\\ 0{,}08\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}4{,}93\\ 3{,}07\end{bmatrix}$ N

$F^2 = [K]\, u_{max}^{(2)} = \begin{bmatrix}100 & -100\\ -100 & 200\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0{,}0048\\ -0{,}0079\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1{,}27\\ 2{,}06\end{bmatrix}$ N

Método 2:

$S_1 = \Gamma_1 M \phi_1 = 1{,}17\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0{,}618\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}17\\ 0{,}723\end{bmatrix} \rightarrow f^{(1)} = S_1 A_1 =$

$= \begin{bmatrix}1{,}17\\ 0{,}723\end{bmatrix}\cdot 4{,}25 = \begin{bmatrix}4{,}85\\ 3{,}07\end{bmatrix}$ N

$S_2 = \Gamma_2 M \phi_2 = 0{,}28\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0{,}618\\ 0{,}28\end{bmatrix} \rightarrow f^{(2)} = S_2 A_2 = \begin{bmatrix}-0{,}173\\ 0{,}28\end{bmatrix}$ 7

$= \begin{bmatrix}-1{,}26\\ 2{,}05\end{bmatrix}$ N

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2016-2017 DINÁMICA DE ESTRUCTURAS Examen Final [illegible]_2017

EJERCICIOS PRÁCTICOS: Tiempo: [illegible] minutos

PP1.- [illegible]

En un buque oceanográfico se dispone un equipo de medida en un local situado a proa de Cámara de Máquinas. En este local se ha medido una aceleración de 1g (máximo admisible para el equipo) debido a movimientos de base para frecuencias de excitación de 13 Hz. Se conoce la frecuencia propia del equipo de medida que es igual a 9 Hz. Se considerará un ratio de amortiguamiento del 10%.

Se solicita:

1.- Indicar justificadamente el efecto que tendría en la aceleración transmitida al equipo el hecho de aumentar la frecuencia de excitación a [illegible] Hz. ¿y si se reduce hasta [illegible] Hz?

2.- Si en alguna de las dos situaciones anteriores la aceleración que le llega al equipo supera 1g, indicar qué influencia tendría:

a) Aumentar la masa al doble.

b) Disminuir la rigidez a la mitad, y aumentar la rigidez una vez [illegible]

PP2.- [illegible]

Para un sistema amortiguado, se ha comprobado que al desplazarlo [illegible] equilibrio 10mm y tras transcurrir [illegible] y [illegible] ciclos, el sistema [illegible]. Si el amortiguamiento "c" = [illegible] N.s/m, se pide calcular la masa del [illegible]

PP3.- [illegible]

Para la estructura de la figura, con 3 masas concentradas, se conocen:

[illegible]

[illegible]

Se aplican fuerzas en los 3 niveles según la ley f(t)= S. p(t), donde S = [1 -1 1]^T y p(t) = sen wt. En este caso se solicita:

1.- [illegible] Obtener la expansión modal del vector S, que define la distribución espacial de fuerzas.

2.- [illegible] Calcular el valor de la fuerza estática en la [illegible]

3.- [illegible] Obtener los factores de contribución modal

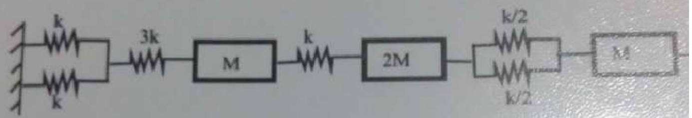
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales. Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2016-2017 **DINÁMICA DE ESTRUCTURAS** **Final 01_02_2017**

EJERCICIOS TEÓRICOS: Tiempo **15** minutos

PT1 (1.7p)

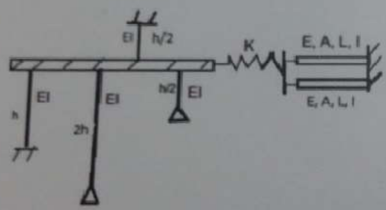
1.-Obtener la ecuación de movimiento del siguiente sistema mediante el Principio de D'Alembert. Indicar los pasos dados para llegar a la ecuación



2.-Obtener la matriz de rigidez.

PT2 (0.8p)

Calcular la rigidez equivalente del siguiente sistema:



$\frac{3EI}{h^3}$ $\frac{17EI}{h^3}$