

**Nombre y apellidos:**

**Número de matrícula:**

- todos los problemas breves valen lo mismo
- las respuestas tienen que estar justificadas (razonamiento matemático, gráfico, etc)
- la única respuesta que se corrige es la que aparece en el rectángulo marcado
- no usar ningún otro papel de borrador y no escribir con lápiz
- 60 min, 6 problemas breves (4 puntos en total, 0.667 puntos cada problema)

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.

Las preactas se publicarán no más tarde del día 19 de enero y la revisión de examen será el miércoles 21 de enero a las 13:00 en la sala R3.

1. Un cristal está definido por una red hexagonal P y la base siguiente

- un átomo A en (0,0,0)
- cinco átomos B en  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Calcular la densidad del material cristalino.

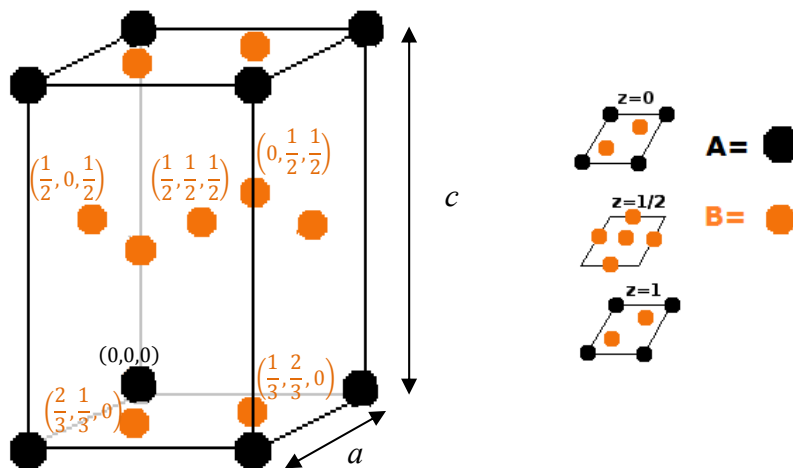
Datos:  $Mw_A = 40.08 \text{ kg/kmol}$        $Mw_B = 63.54 \text{ kg/kmol}$

$a = 5.092 \times 10^{-10} \text{ m}$        $c = 4.086 \times 10^{-10} \text{ m}$

la densidad es	$\text{kg/m}^3$
----------------	-----------------

**Solución:**

Cristal: red hexagonal P más base:



Volumen de la celda  $V = \frac{a^2 c \sqrt{3}}{2} = 9.175 \times 10^{-29} \text{ m}^3$

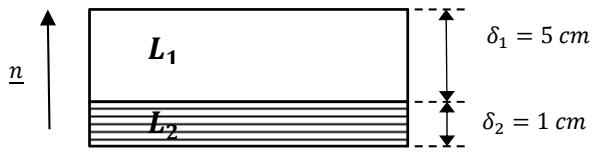
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



2. Se diseña un material compuesto **M** para el recubrimiento de vehículos espaciales con la estructura que se indica en la figura:



La lámina  $L_1$  está formada por un material cerámico refractario hexagonal (**R**) cuyas componentes de conductividad térmica referidas a los ejes convencionales del material **R** son conocidas:

$$k_{R11} = 0.052 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad k_{R33} = 0.017 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

El material hexagonal **R** está orientado de forma que su eje senario coincide con la dirección  $\underline{n}$ .

La lámina  $L_2$  es un material compuesto (**C**) con fibras de sílice orientadas unidireccionalmente en una matriz de metacrilato, tal como se indica en la figura. Las componentes de la conductividad térmica de **C** en sus ejes convencionales son:

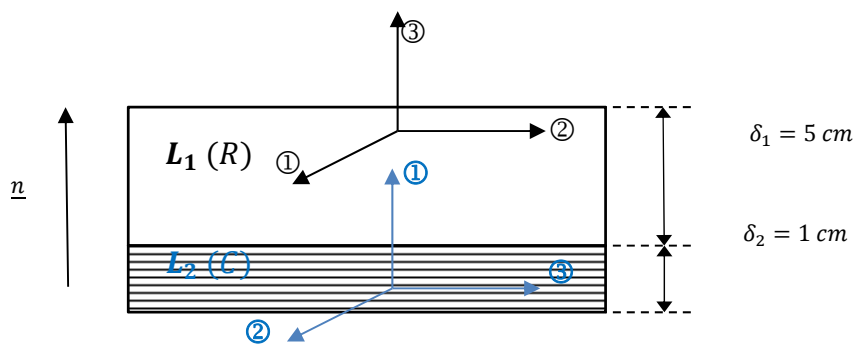
$$k_{C11} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad k_{C33} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

Determinar la conductividad térmica del material compuesto **M** en la dirección  $\underline{n}$ .

la conductividad térmica  $k_{M\underline{n}} = \quad \quad \quad \text{W/m} \cdot \text{K}$

**Solución:**

Teniendo en cuenta los ejes convencionales de los materiales que forman las láminas  $L_1$  y  $L_2$  representados en la figura:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. Un material nanocompuesto poroso (**C**) está formado por grafito expandido en una matriz epoxi. Se quiere determinar la fracción volumétrica de los poros en el material compuesto, suponiendo que todos los poros están en el grafito y que el resto del material no tiene poros de ningún tipo.

Para ello se corta un prisma recto de dimensiones  $a = 0.0123 \text{ m}$ ;  $b = 0.0013 \text{ m}$  y  $c = 0.120 \text{ m}$  y se determina su masa  $M_C = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ . A continuación se introduce el prisma en una mezcla de  $\text{H}_2\text{SO}_4$  y  $\text{H}_2\text{O}_2$  para eliminar la resina epoxi, obteniéndose al finalizar el tratamiento una masa de fibras de grafito  $M_F = 1.3 \times 10^{-3} \text{ kg}$ .

Determinar la fracción volumétrica de poros en el material compuesto.

Datos:  $\rho_{epoxi} = 1160 \text{ kg/m}^3$        $\rho_{grafito} = 2230 \text{ kg/m}^3$

Considerar que el grafito expandido es un material compuesto de grafito y aire y que la densidad del aire es despreciable.

*la fracción volumétrica de poros en el material C es*

**Solución:**

La fracción volumétrica de poros en el material compuesto se determina como

$$V_{poros} = \frac{abc - \left[ \frac{M_F}{\rho_{grafito}} + \frac{M_C - M_F}{\rho_{epoxi}} \right]}{abc} = 0.382$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. Para determinar la clase cristalográfica de un material cerámico se prepara una muestra en forma de cubo, con las caras cortadas perpendicularmente a las direcciones convencionales del material (suponiendo que fueran conocidas), y se realizan varios ensayos, obteniéndose la siguiente información:

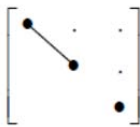
- las componentes de la conductividad eléctrica referidas a los ejes convencionales del material son  $\sigma_{11} = \sigma_{22} \neq \sigma_{33}$
- no existen acoplamientos entre tensiones (esfuerzos) normales y deformaciones angulares ni entre tensiones tangenciales (esfuerzos cortantes) y deformaciones longitudinales
- el material solo se polariza cuando se aplican tensiones tangenciales
- la componente del módulo piezoeléctrico  $d_{312} \neq 0$

*la clase cristalográfica del material es*

### Solución:

Se analiza la información sobre los distintos ensayos realizados, descartando las clases cristalográficas que no cumplan los requisitos.

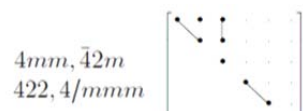
- Si las componentes de la conductividad eléctrica referidas a los ejes convencionales del material son  $\sigma_{11} = \sigma_{22} \neq \sigma_{33}$



El material debe ser del sistema tetragonal, trigonal o hexagonal

- Si no existen acoplamientos entre tensiones (esfuerzos) normales y deformaciones angulares ni entre tensiones tangenciales (esfuerzos cortantes) y deformaciones longitudinales, las matrices de complianza y rigidez elásticas deben tener nulos todos los términos en el subbloque superior derecho (y, por simetría, en el inferior izquierdo). Sólo son posibles las siguientes clases:

- sistema tetragonal:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

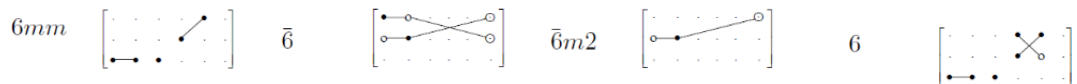
Cartagena99

- Si el material solo se polariza cuando se aplican tensiones tangenciales, la matriz de los módulos piezoeléctricos debe tener nulos todos los términos de la mitad izquierda ( $d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{21} = d_{22} = d_{23} = d_{31} = d_{32} = d_{33} = 0$ ), y algún término no nulo en la mitad derecha, por lo que descartamos las siguientes clases entre las seleccionadas en el apartado anterior:

- sistema tetragonal: se descartan las clases  $4mm$  y la clase centrosimétrica  $4/mmm$



- sistema hexagonal: se descartan las clases  $6mm$ ,  $\bar{6}$ ,  $\bar{6}m2$ ,  $6$  y las centrosimétricas  $6/mmm$  y  $6/m$



Por lo tanto, el cristal debe pertenecer a una de estas clases:  $422$ ,  $\bar{4}2m$  o  $622$ .

- Como la componente del módulo piezoeléctrico  $d_{312} \neq 0$ , sólo es posible la clase  $\bar{4}2m$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

5. Para un material con estructura HCP se conocen sólo los valores siguientes del tensor complianza elástica:

$$s_{1111} = 9.0 \times 10^{-10} Pa^{-1} \quad s_{1221} = 6.5 \times 10^{-10} Pa^{-1} \quad s_{3333} = 1.0 \times 10^{-10} Pa^{-1}$$

Determina el valor de la relación de Poisson transversal- transversal  $\nu_{tt}$ .


$\nu_{tt} =$

**Solución:**

Un material con estructura HCP es de la clase  $\bar{6}m2$  del sistema hexagonal.

La estructura de la matriz complianza es

hexagonal    todas



con  $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$ . Se pide determinar  $\nu_{tt}$  a partir de los valores proporcionados del tensor complianza elástica. Así, como

$$\nu_{tt} = -s_{12}E_t = -\frac{s_{12}}{s_{11}} \text{ siendo } s_{12} = s_{1111} - 2s_{1221} = -4 \times 10^{-10} Pa^{-1}$$

$$\text{y } \nu_{tt} = \mathbf{0.444}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

6. Para un determinado material, se conocen las componentes del tensor conductividad eléctrica referidos a un sistema de coordenadas que no tiene por qué ser coincidente con los ejes convencionales del material:

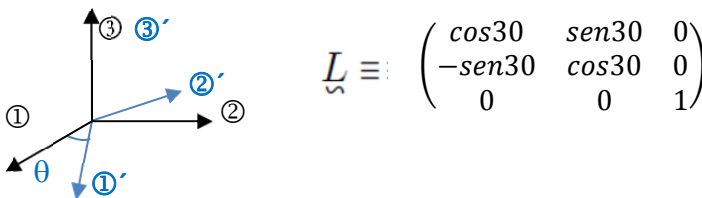
$$[\underline{\sigma}] = \begin{pmatrix} 1.250 & -0.433 & 0 \\ -0.433 & 1.750 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times 10^{-6} (\Omega m)^{-1}$$

Se pide determinar las componentes del tensor conductividad eléctrica  $[\underline{\sigma}']$  en un nuevo sistema de ejes que se obtiene a partir del anterior por rotación de  $30^\circ$  alrededor del eje  $\textcircled{3}$ .

$$[\underline{\sigma}'] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Para determinar las componentes del tensor conductividad eléctrica en los nuevos ejes  $\textcircled{1}'$ ,  $\textcircled{2}'$  y  $\textcircled{3}'$ , obtenidos a partir de los ejes  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  y  $\textcircled{3}$ , se define en primer lugar la matriz de transformación:



$$L_{\underline{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando la ley de transformación  $[\underline{T}'] = L_{\underline{T}} [\underline{T}] L_{\underline{T}}^T$

$$[\underline{\sigma}'] = \begin{pmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.250 & -0.433 & 0 \\ -0.433 & 1.750 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30 & -\sin 30 & 0 \\ \sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times 10^{-6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times 10^{-6} (\Omega m)^{-1}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Nombre:

N° de matrícula

### Problema 1

En la respiración el oxígeno pasa del aire a la sangre por difusión a través de una capa de líquido de espesor  $h_L = 4 \times 10^{-4}$  m y del tejido de la pared del alvéolo, de espesor  $h_T = 1.8 \times 10^{-3}$ . Las difusividades del oxígeno en el líquido y en el tejido son  $D_L = 1.2 \times 10^{-7}$  y  $D_T = 7.3 \times 10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s. Las concentraciones (todas en kg/m<sup>3</sup>) en el aire y en la cara exterior del líquido (punto A en la figura) están relacionados por la ley de Henry:

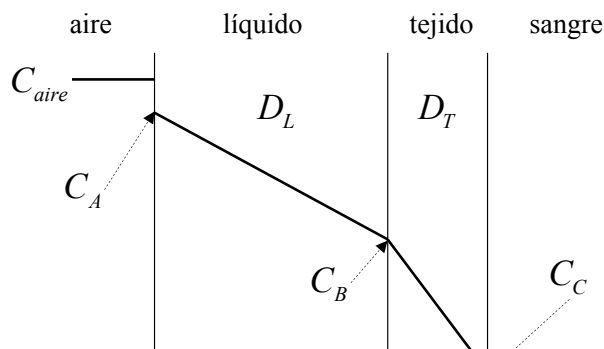
$$C_{aire} = H C_A \quad H = 100 \text{ (sin dimensiones)}$$

y las concentraciones en la sangre ( $C_{sangre} = 4.44 \times 10^{-4}$  kg/m<sup>3</sup>) y en la cara interior del tejido (C) están relacionadas por una ley análoga:

$$C_{sangre} = K C_C \quad K = 0.34 \text{ (sin dimensiones)}$$

En estado estacionario los perfiles de concentración son lineales. El aire se considera mezcla ideal de gases ideales,  $Mw_{O_2} = 32$ ,  $Mw_{N_2} = 28$  kg/kmol y  $R = 8.314$  J/mol K. Calcular:

1. la difusividad del oxígeno  $D_{O_2}$  a través del líquido más el tejido (entre los puntos A y C), considerándolo como un material compuesto,
2. para aire normal (21 % en volumen de oxígeno, resto nitrógeno) a presión atmosférica ( $P_1 = 1.013$  bar) y  $T = 298$  K, la concentración de oxígeno  $C_B$  en la interfaz entre el líquido y el tejido (punto B),
3. el flujo másico de oxígeno (kg/m<sup>2</sup>s) a través del líquido,
4. el flujo másico de oxígeno (kg/m<sup>2</sup>s) a través del tejido,
5. se prepara un aire sintético (solo con oxígeno y nitrógeno) para buceo, a una presión total de  $P_2 = 3.5$  bar y  $T = 298$  K y se necesita que el flujo de oxígeno a la sangre y la concentración de oxígeno en la sangre sean los mismos que con el aire normal a presión ambiente. ¿Qué % en volumen de oxígeno debe contener el aire sintético? Suponer que ni las difusividades ni  $H$  ni  $K$  dependen de la presión.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



1. en la dirección de la difusión del oxígeno los dos componentes (líquido y tejido) están en serie, con lo que las difusividades se suman con la regla armónica:

$$V_L = \frac{h_L}{h_L + h_T} = 0.182 \quad V_T = \frac{h_T}{h_L + h_T} = 0.818 \quad D_{O_2} = \left( \frac{V_L}{D_L} + \frac{V_T}{D_T} \right)^{-1} = 7.86 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

2. el modo más directo de obtener la concentración de oxígeno en B es tener en cuenta que el flujo de oxígeno a través de T y de L es el mismo en estado estacionario (no hay acumulación). Al aplicar la ley de Fick (flujo = -difusividad × gradiente) en una dimensión:

$$D_L \frac{C_A - C_B}{h_L} = D_T \frac{C_B - C_C}{h_T}$$

y eliminando  $C_A$  y  $C_C$  de la ecuación anterior con  $C_A = \frac{C_{aire}}{H}$  y  $C_C = \frac{C_{sangre}}{K}$  se obtiene:

$$C_B = \frac{\frac{1}{H} D_L h_T C_{aire} + \frac{1}{K} D_T h_L C_{sangre}}{D_L h_T + D_T h_L}$$

La concentración de oxígeno en la sangre es un dato; la concentración de oxígeno en  $\text{kg}/\text{m}^3$  en el aire se obtiene de la ecuación de gas ideal, de la masa molecular del oxígeno  $Mw_{O_2} = 32 \text{ kg}/\text{kmol}$  y de su presión parcial (fracción molar o volumétrica por presión total):

$$C_{aire} = \frac{0.21 P_1 10^5 Mw_{O_2}}{R 10^3 T} = 0.275 \text{ kg}/\text{m}^3$$

(el factor de  $10^3$  es necesario para expresar  $R$  en  $\text{J}/\text{kmol K}$ ; el de  $10^5$  es para la conversión de bar a Pa). Con lo que resulta  $C_B = 2.576 \times 10^{-3} \text{ kg}/\text{m}^3$ .

3. y 4. en estado estacionario, el flujo de oxígeno a través de L (pregunta 3) es el mismo que a través de T (pregunta 4) y el mismo que a través del compuesto. Un modo de calcularlo es usando el gradiente y la difusividad a través del líquido:

$$J = D_L \frac{\frac{C_{aire}}{H} - C_B}{h_L} = 5.151 \times 10^{-8} \text{ kg}/\text{m}^2\text{s}$$

El mismo resultado se obtiene usando el gradiente y la difusividad a través del tejido:

$$J = D_T \frac{C_B - \frac{C_{sangre}}{K}}{h_T} = 5.151 \times 10^{-8} \text{ kg}/\text{m}^2\text{s}$$

O también usando el gradiente total (homogeneizado) entre A y C y la difusividad del compuesto (homogeneizada) entre los mismos puntos:

$$J = D_{O_2} \frac{\frac{C_{aire}}{H} - \frac{C_{sangre}}{K}}{h_L + h_T} = 5.151 \times 10^{-8} \text{ kg}/\text{m}^2\text{s}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

Nombre:

N° de matrícula

### Problema 2

Un terpolímero D es un elastómero termoplástico formado por unidades de etileno (A), butadieno (B) y propileno (C). Se obtiene mezclando en caliente dos materias primas: polietileno (A) y un copolímero BC de butadieno y propileno con una relación molar 1:1 de butadieno a propileno. Al enfriar la mezcla se separan tres fases distintas: un copolímero E de etileno y butadieno con una relación molar 4:1 (etileno:butadieno), un segundo copolímero F también de etileno y butadieno con una relación molar 1:5 (etileno:butadieno) y un tercer copolímero G de propileno y butadieno con una relación molar 9:1 (propileno:butadieno).

La especificación técnica del terpolímero D indica que tiene que tener una fracción volumétrica de propileno entre 0.25 y 0.35. Determinar con los siguientes datos:

Masas atómicas:	C: 12	H: 1		kg/kmol
Módulos elásticos:	$E_E = 2 \times 10^9$	$E_F = 2.2 \times 10^9$	$E_G = 8.7 \times 10^8$	Pa
Densidades:	$\rho_{PE} = 930$	$\rho_{PBU} = 890$	$\rho_{PP} = 1040$	kg/m <sup>3</sup>
	(PE: polietileno	PBU: polibutileno	PP polipropileno)	

- la composición volumétrica del terpolímero D que tenga mayor módulo elástico en condiciones de isodeformación, cumpliéndose todas las especificaciones anteriores y referida a las tres fases inmiscibles, E, F y G, que lo componen ( $V_E^D, V_F^D, V_G^D$ ),
- el módulo elástico (Pa) en condiciones de isodeformación del terpolímero D del punto anterior,
- la composición volumétrica (fracciones volumétricas de etileno, butadieno y propileno,  $V_A^D, V_B^D, V_P^D$ ) del terpolímero D,
- la masa (kg) de las materias primas A y copolímero BC necesarias para obtener 1 kg del terpolímero D.

Nota: se recomienda utilizar el diagrama ternario adjunto trabajando en fracciones volumétricas. Las fracciones volumétricas y las fracciones molares de los componentes NO SON IGUALES.

(3 puntos, 45 minutos)

Sol.:

- en primer lugar se calculan las masas moleculares de A, B y C:  $Mw_A = 28$ ,  $Mw_B = 54$ ,  $Mw_C = 42$  kg/kmol. Las materias primas para obtener el terpolímero D son A (puro) y un copolímero BC 1:1. Para trabajar en fracciones volumétricas primero se obtienen las fracciones máscas de B y C en el copolímero:

$$X_B^{BC} = \frac{Mw_B}{Mw_B + Mw_C} = 0.5625 \quad X_C^{BC} = 1 - X_B^{BC} = 0.4375$$

... continuación de la especificación técnica del terpolímero D...

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

El terpolímero D se separa después en tres copolímeros E, F y G cuyas composiciones volumétricas se calculan análogamente y se sitúan en el diagrama. La composición de D estará además dentro del triángulo  $\triangle EFG$ .

$$E: X_A^E = \frac{4Mw_A}{4Mw_A + Mw_B} = 0.675 \quad X_B^E = 1 - X_A^E = 0.325$$

$$V_A^E = \frac{\frac{X_A^E}{\rho_{PE}}}{\frac{X_A^E}{\rho_{PE}} + \frac{X_B^E}{\rho_{PBu}}} = 0.665 \quad V_B^E = 1 - V_A^E = 0.335$$

$$F: X_A^F = \frac{Mw_A}{Mw_A + 5Mw_B} = 0.094 \quad X_B^F = 1 - X_A^F = 0.906$$

$$V_A^F = \frac{\frac{X_A^F}{\rho_{PE}}}{\frac{X_A^F}{\rho_{PE}} + \frac{X_B^F}{\rho_{PBu}}} = 0.09 \quad V_B^F = 1 - V_A^F = 0.91$$

$$G: X_C^G = \frac{9Mw_C}{9Mw_C + Mw_B} = 0.875 \quad X_B^G = 1 - X_C^G = 0.125$$

$$V_C^G = \frac{\frac{X_C^G}{\rho_{PP}}}{\frac{X_C^G}{\rho_{PP}} + \frac{X_B^G}{\rho_{PBu}}} = 0.857 \quad V_B^G = 1 - V_C^G = 0.143$$

Se dibujan también las líneas correspondientes a la especificación técnica (contenido máximo y mínimo de C en D):  $0.25 \leq V_C^D \leq 0.35$  con lo que la composición del terpolímero D estará sobre el segmento  $\overline{D_1D_2}$  que delimita la especificación anterior. Como el módulo elástico en isodeformación es una función lineal de las fracciones volumétricas de los componentes E, F y G, una de las dos composiciones extremas de D será la de módulo máximo y la otra será la de módulo mínimo.

Se determinan las fracciones volumétricas de E, F y G en  $D_1$  y  $D_2$  utilizando la regla de la palanca:

$$V_G^{D_1} = \frac{\overline{D_1M_1}}{\overline{GM_1}} = 0.291 \quad V_{M_1}^{D_1} = 1 - V_G^{D_1} = 0.709$$

$$V_E^{D_1} = V_{M_1}^{D_1} \frac{\overline{M_1F}}{\overline{EF}} = 0.543 \quad V_F^{D_1} = 1 - V_G^{D_1} - V_E^{D_1} = 0.166$$

$\overline{D_1M_1}$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

