Nombre: **Número de matrícula:**

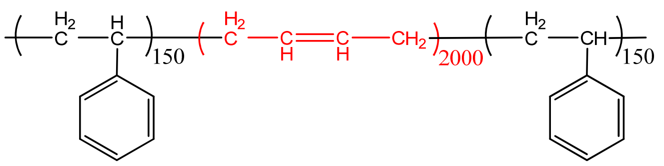
- **sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.**
- **sólo se calificarán los problemas en los que se haya marcado una respuesta. Si la opción elegida es "*ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:*", la respuesta debe aparecer sobre la línea de puntos inmediatamente a continuación.**
- **sólo una respuesta es correcta.**
- **las respuestas incorrectas no restan puntos.**
- **usar estas mismas hojas para hacer los cálculos, no usar ningún otro papel.**
- **60 min, 0.5 puntos cada problema.**

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.
Las preactas se publicarán no más tarde del día 1 de febrero y la revisión de examen será el martes 7 de febrero a las 12:00 en la sala R3.

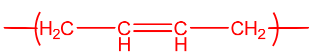
1. Los copolímeros de bloques son una clase especial de materiales capaces de autoensamblarse en estructuras de micro/nanodominios. Los copolímeros estireno-butadieno-estireno (SBS) pertenecen a este tipo de materiales. Se dispone de un copolímero SBS donde el grado de polimerización para el bloque central es de 2000 y para los bloques de los extremos de 150 cada uno. Determina la densidad del copolímero SBS, sabiendo que $\rho_{poliestireno} = 1.04\frac{g}{cm^3}$ y $\rho_{polibutadieno} = 0.89\frac{g}{cm^3}$

- 923.6 kg/m^3
- 933.8 kg/m^3
- 919.7 kg/m^3
- 907 kg/m^3
- 924.2 kg/m^3
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : …………………………………..…

Solución: el copolímero SBS tiene la siguiente estructura:

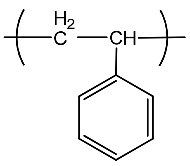


siendo



los residuos de butadieno y

M_B=54 kg/kmol



los residuos de estireno

M_S=104 kg/Kmol

La densidad del copolímero se calcula como: $\frac{1}{\rho_{SBS}} = \frac{X_S}{\rho_S} + \frac{X_B}{\rho_B}$ **siendo X_S y X_B las fracciones másicas de estireno y butadieno:**

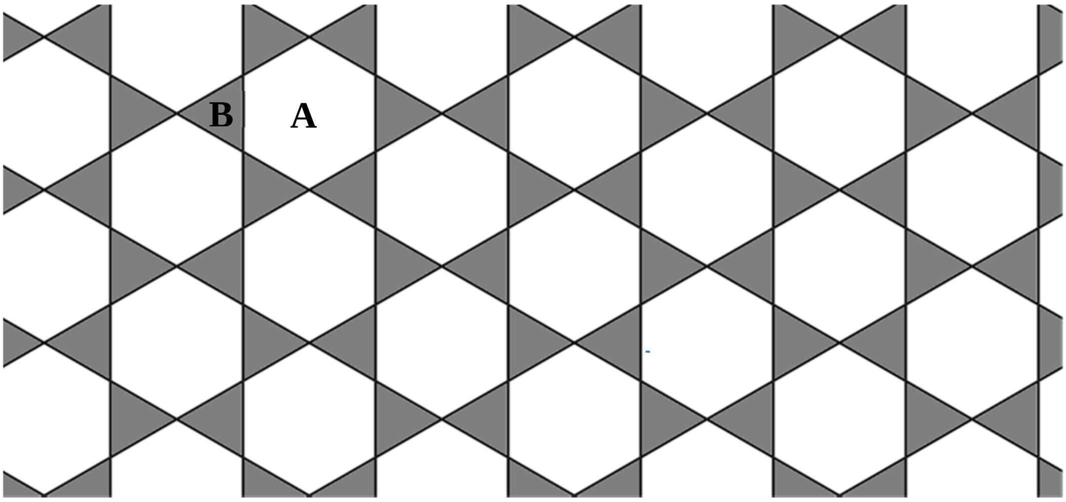
$$X_B = \frac{2000 \times 54}{2000 \times 54 + 2 \times 150 \times 104} = 0.776$$

$$X_S = \frac{2 \times 150 \times 104}{2000 \times 54 + 2 \times 150 \times 104} = 0.224$$

$$\frac{1}{\boldsymbol{\rho_{SBS}}} = \frac{0.776}{890} + \frac{0.224}{1040} \Rightarrow \boldsymbol{\rho_{SBS} = 919.7\,\frac{kg}{m^3}}$$

2. Se dispone de un tejido de material compuesto formado por los materiales A (en blanco en la figura) y B (en gris) para la fabricación de cinturones de seguridad. Los materiales A y B se disponen hexagonalmente, siendo la sección transversal del material la que se indica en la figura.

NOTA: La superficie hexagonal A es igual a 6 veces la superficie triangular B.



Determinar su módulo elástico en la dirección perpendicular al plano de la figura.

Datos: Los materiales A y B, por separado, son homogéneos e isótropos.

$E_A = 2 \times 10^9 Pa$ $E_B = 5 \times 10^{10} Pa$

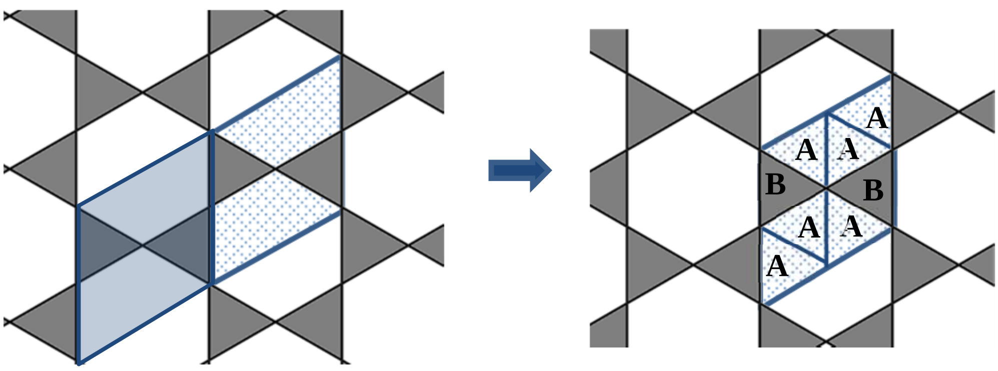
- $1.83 \times 10^{10} Pa$
- $1.69 \times 10^{10} Pa$
- $3.29 \times 10^9 Pa$
- $2.63 \times 10^9 Pa$
- $1.40 \times 10^{10} Pa$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………

Solución: Para determinar el módulo elástico en la dirección perpendicular al plano de la figura se aplica la regla de Voigt, ya que los componentes se encuentran en isodeformación:

$$E_{compuesto} = V_A E_A + V_B E_B$$

Las fracciones volumétricas se calculan fácilmente a partir de la geometría del material: seleccionando, por ejemplo, el área resaltada en azul

$$V_A = \frac{6}{8} = 0.75 \; y \; V_B = \frac{2}{8} = 0.25$$



por lo que el módulo elástico del material compuesto será:

$$E_{compuesto} = V_A E_A + V_B E_B = 0.75 \times 2 \times 10^9 + 0.25 \times 5 \times 10^{10} = 1.40 \times 10^{10} Pa$$

3. A una carga de cuarzo (SiO_2) se le añade caolinita $(Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O)$ para obtener un material cerámico cuyo contenido en alúmina (Al_2O_3), una vez horneado, sea del 30% en masa. ¿Qué cantidad de caolinita $(Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O)$ será preciso añadir a 100 kg de cuarzo?

NOTA: En el horno se pierde completamente el agua de cristalización.

Masas atómicas: Al =27 O =16 Si =28 H =1

- 271.99 kg
- 277.42 kg
- 218.64 kg
- 266.67 kg
- 297.28 kg
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………

Solución: De acuerdo con los datos de masas atómicas del enunciado:

$\boldsymbol{Masa\ molecular}\ SiO_2 = 60 kg/kmol$

$\boldsymbol{Masa\ molecular\ caolinita}\ (Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O) = 258\ kg/kmol$

$\boldsymbol{Masa\ molecular\ caolinita\ deshidratada}\ (Al_2O_3 \cdot 2SiO_2) = 222\ kg/kmol$

$\boldsymbol{Masa\ molecular}\ Al_2O_3 = 102\ kg/kmol$

Considerando que la caolinita $(Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O)$ pierde completamente el agua de cristalización en el horno, la cantidad de caolinita (*x*) que hay que añadir a 100 kg de cuarzo (SiO_2) para que el contenido en alúmina (Al_2O_3) del material cerámico una vez horneado sea del 30% en masa será:

$$0.3 = \frac{masa\ Al_2O_3}{masa\ cuarzo + masa\ caolinita\ deshidratada} = \frac{x \cdot \frac{102}{258}}{100 + x \cdot \frac{222}{258}} \Rightarrow x = 218.64\ kg$$

4. Sabiendo que la resistividad eléctrica de un determinado semiconductor intrínseco a 300ºC es $7.95\ (\Omega \cdot m)$, determinar la separación (en eV) entre los niveles energéticos correspondientes a la banda de valencia y a la banda de conducción para dicho material.

Datos: A temperatura ambiente (300K): $n_i = 1.1 \times 10^{15}\ \frac{portadores}{m^3}$; $\mu_n = 0.720\ \frac{m^2}{(V \cdot s)}$; $\mu_p = 0.015\ \frac{m^2}{(V \cdot s)}$

- 1.22 eV
- 0.46 eV
- 1.00 eV
- 0.75 eV
- 0.69 eV
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………

Solución: La diferencia de energía (E_g) entre las bandas de valencia y conducción en un semiconductor intrínseco viene dada por:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}} \ siendo\ k = constante\ de\ Boltzmann$$

por lo que conocidos los valores de conductividad a dos temperaturas diferentes, se puede determinar E_g:

$$\sigma_{300+273} = \sigma_{573} = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2 \cdot k \cdot 573}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{573}}{\sigma_{300}} = e^{-\frac{E_g}{2 \cdot k}\left(\frac{1}{573} - \frac{1}{300}\right)} \Rightarrow E_g = -\frac{2 \cdot k}{\left(\frac{1}{573} - \frac{1}{300}\right)} \ln\left(\frac{\sigma_{573}}{\sigma_{300}}\right)$$

$$\sigma_{300} = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2 \cdot k \cdot 300}}$$

La conductividad a temperatura ambiente (300K) se calcula a partir de los datos del enunciado:

$$\sigma = (\mu_n + \mu_p) n_i q \Rightarrow \sigma_{300} = 1.294 \times 10^{-4}\ (\Omega \cdot m)^{-1}$$

y la conductividad a 573K

$$\sigma_{573} = \frac{1}{\rho_{573}} = 0.126 (\Omega \cdot m)^{-1}$$

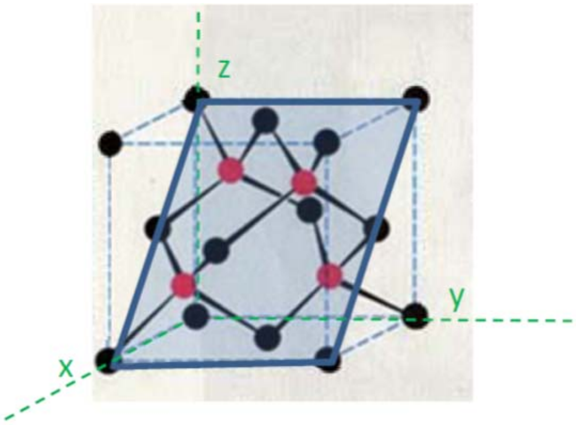
por lo que simplemente sustituyendo se determina el valor de Eg:

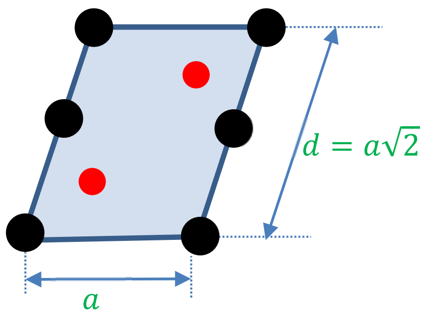
$$E_g = -\frac{2 \cdot k}{\left(\frac{1}{573} - \frac{1}{300}\right)} \ln\left(\frac{\sigma_{573}}{\sigma_{300}}\right) = -\frac{2 \cdot 8.62 \times 10^{-5}}{\left(\frac{1}{573} - \frac{1}{300}\right)} \ln\left(\frac{0.126}{1.294 \times 10^{-4}}\right) = 0.75\ eV$$

5. Un material cerámico AB cristaliza en la misma estructura que la blenda de cinc. Sabiendo que los radios iónicos son $r_{A^{+2}} = 0.083\, nm$; $r_{B^{-2}} = 0.174\, nm$, calcular la densidad iónica superficial (iones/m^2) para los planos de la forma {1 0 1}.

- $4.01 \times 10^{18}\ \frac{iones}{m^2}$
- $8.03 \times 10^{18}\ \frac{iones}{m^2}$
- $1.20 \times 10^{19}\ \frac{iones}{m^2}$
- $9.44 \times 10^{18}\ \frac{iones}{m^2}$
- $7.28 \times 10^{18}\ \frac{iones}{m^2}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………

Solución: La estructura del material cerámico AB es tipo blenda de cinc: los aniones forman una red FCC donde la mitad de los huecos tetraédricos están ocupados por los cationes:





$\{\mathbf{101}\}$

La densidad iónica superficial vendrá dada por:

$$\boldsymbol{densidad\ iónica\ superficial} = \frac{número\ de\ iones}{área\ plano} = \frac{2 + 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4}}{a^2\sqrt{2}} = 8.03 \times 10^{18}\,\frac{iones}{m^2}$$

siendo

$$\boldsymbol{a} = \frac{4\left(r_{A^{+2}} + r_{B^{-2}}\right)}{\sqrt{3}} = 5.935 \times 10^{-10} m$$

6. Se dispone de una probeta cilíndrica de 10 cm de longitud y 2 mm de diámetro de un material elastomérico, preparado a partir de polietileno y reticulado por irradiación con electrones, lo que permite establecer enlaces covalentes entre las cadenas de polietileno. Cuando la muestra anterior se somete a una carga de 15N y a una temperatura de 300K, se estira hasta alcanzar una longitud el doble de la inicial. Sabiendo que la densidad del elastómero es 950 $\frac{kg}{m^3}$, determina cada cuántas unidades estructurales repetitivas ($UER = -CH_2 - CH_2-$) se establece, en promedio, un enlace covalente.

Considerar que la relación entre el esfuerzo de tracción aplicado (τ) en una dirección y la elongación relativa (λ) en la misma dirección está dada por:

$$\tau = nkT\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

siendo *n* = número de puntos de reticulación por unidad de volumen

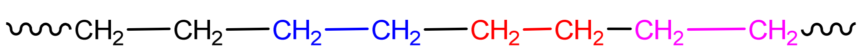
k = constante de Boltzmann

T = temperatura absoluta

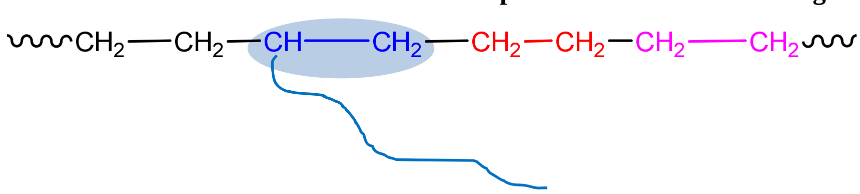
λ= relación entre la longitud deformada y la longitud sin deformar

- 47
- 31
- 40
- 50
- 69
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: ……………………………………

Solución: Una cadena de polietileno está formada por la repetición de unidades de $-CH_2 - CH_2 -$ (UER):



Por irradiación con electrones se establecen puntos de reticulación en algunas UER:



Se pide calcular cada cuántas UER, en promedio, se establece un punto de reticulación:

- **Tomando como base de cálculo un volumen de 1m^3, se pueden determinar fácilmente los puntos de reticulación:**

$$\tau = nkT\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) \Rightarrow n = \frac{\tau}{kT\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)} = \frac{\frac{F}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2}}{kT\left(2 - \frac{1}{2^2}\right)} = 6.59 \times 10^{26}\,\frac{puntos\ de\ reticulación}{m^3}$$

siendo $\boldsymbol{\lambda = \frac{L}{L_0} = 2\ y\ k = constante\ de\ Boltzmann}$

- **por otra parte también se conoce el número de UER** ($UER = -CH_2 - CH_2-$) **contenidas en 1m^3:**

$$número\ de\ UER = 1m^3 \times \frac{950\ kg}{1m^3} \times \frac{1\ kmol}{28\ kg} \times \frac{6.023 \times 10^{26}\ UER}{1\ kmol} = 2.043 \times 10^{28}\ número\ UER$$

Una simple división nos permite calcular cada cuántas UER se establece, en promedio, una reticulación:

$$\frac{número\ total\ de\ UER}{puntos\ de\ reticulación} = \frac{2.043 \times 10^{28}}{6.59 \times 10^{26}} = 31$$

7. Los inyectores de combustible disponen en su interior de un dispositivo piezoeléctrico, encargado de producir el movimiento mecánico necesario para la inyección cuando se aplica una diferencia de potencial. Se dispone de un cristal piezoeléctrico de la clase $mm2$, cortado en forma de cubo de lado L. Determinar la variación de volumen que experimenta el cristal cuando se aplica un campo eléctrico en la dirección del eje cartesiano 3 (E_3).
Suponer pequeña deformación.

- $L^3E_3(d_{31} + d_{32} + d_{33})$
- $E_3(d_{31} + d_{32} + d_{33})$
- $L^3(d_{31} + d_{32} + d_{33} + 1)$
- $L^3E_3(d_{31} + d_{32} + d_{33} + 1)$
- 0
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………

Solución: Se trata de un ejemplo de piezoelectricidad inversa:

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T} = \underline{\boldsymbol{E}^{T}}\ \underset{\smile}{\boldsymbol{d}}$$

Al tratarse de un cristal de la clase *mm2:*

$$(\boldsymbol{\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4\ \varepsilon_5\ \varepsilon_6}) = (\mathbf{0\ 0}\ \boldsymbol{E_3})\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{24} & \cdot & \cdot \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\varepsilon_1} = E_3 d_{31}$

$\boldsymbol{\varepsilon_2} = E_3 d_{32}$

$\boldsymbol{\varepsilon_3} = E_3 d_{33}$

La variación de volumen (deformaciones pequeñas):

$$\Delta V = V_F - V_0 = L(1+\varepsilon_1)L(1+\varepsilon_2)L(1+\varepsilon_3) - L^3 = L^3(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) = L^3 E_3(d_{31}+d_{32}+d_{33})$$

8. Se dispone de un cristal ortorrómbico para el que se conocen los valores de las componentes del tensor conductividad eléctrica (σ_{ij}) en las direcciones convencionales. Determinar el módulo del vector densidad de corriente eléctrica cuando se aplica un campo eléctrico de 100 N/C en la dirección [1 0 1].

Datos: parámetros de red $a = 0.125\ nm$; $b = 0.180\ nm$; $c = 0.455\ nm$

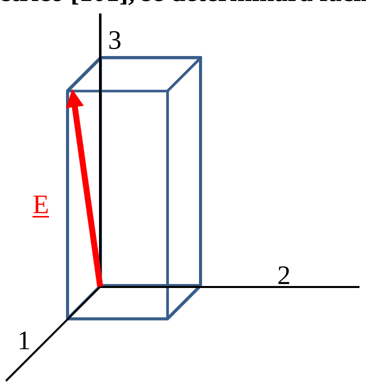
$$\sigma_{11} = 4 \times 10^{-5}\ (\Omega\cdot m)^{-1};\ \sigma_{22} = 2 \times 10^{-5}\ (\Omega\cdot m)^{-1};\ \sigma_{33} = 5 \times 10^{-5}\ (\Omega\cdot m)^{-1}$$

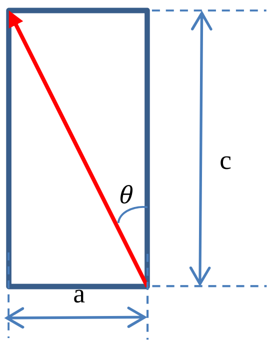
- $4.070 \times 10^{-3}\ \frac{A}{m^2}$
- $4.188 \times 10^{-3}\ \frac{A}{m^2}$
- $4.930 \times 10^{-3}\ \frac{A}{m^2}$
- $4.607 \times 10^{-3}\ \frac{A}{m^2}$
- $4.477 \times 10^{-3}\ \frac{A}{m^2}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es : ……………………………………

Solución: De acuerdo con la ley de Ohm

$$\underline{J} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}$$

Si se conoce el valor de la propiedad de segundo orden, conductividad, en la dirección del campo eléctrico [101], se determinará fácilmente el módulo del vector densidad de corriente:





$$\sigma_{[101]} = \sigma' = l_i l_j \sigma_{ij} = l_1^2 \sigma_{11} + l_3^2 \sigma_{33} = \frac{a^2}{a^2+c^2}\sigma_{11} + \frac{c^2}{a^2+c^2}\sigma_{33}$$
$$= 4.930 \times 10^{-5}\ (\Omega \cdot m)^{-1}$$

Por lo que, según la ley de Ohm:

$$\left|\underline{J}\right| = 4.930 \times 10^{-5} \times 10^{2} = 4.930 \times 10^{-3}\ \frac{A}{m^2}$$

Nombre: **Problema 1** **Número de matrícula:**

En una lesión frecuente en colisiones de automóvil un disco intervertebral cervical (D en la figura) sufre daño por el desplazamiento relativo entre la cabeza (C) y el tronco (T). De modo muy simplificado se puede considerar que durante toda la duración de la colisión, la cabeza se sigue desplazando con velocidad constante v_C m/s mientras que el tronco se ha detenido, es decir v_T=0 m/s (esquema A de la figura). El disco se considera un cilindro de dimensiones $D = 0.042$ m y $H = 7 \times 10^{-3}$ m (esquema B de la figura) entre dos masas que representan la cabeza y el tronco. El disco es un cartílago viscoplástico, sometido a las fuerzas debidas a la colisión y al propio peso de la cabeza (cuya masa es $m = 5.7$ kg). El esfuerzo mecánico en el disco está dado por la siguiente ecuación constitutiva:

$$\underline{\underline{\tau}} = K \dot{\underline{\underline{\gamma}}} + \underline{\underline{\tau}}_g \qquad (1)$$

donde: $\dot{\underline{\underline{\gamma}}} \equiv \left[\nabla \underline{v} + \left(\nabla \underline{v} \right)^T \right]$ es la velocidad de deformación del material del disco (s^{-1}),

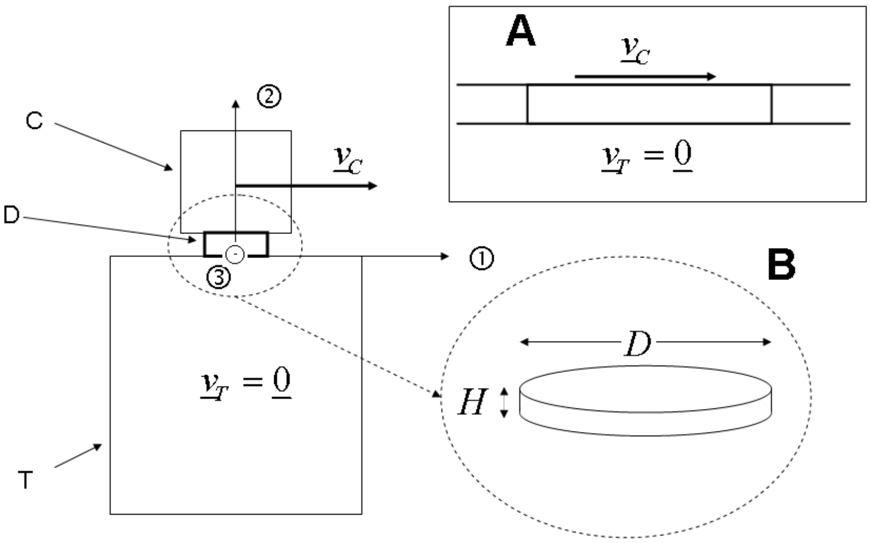
K es un módulo carácterístico del material $K = 1.2 \times 10^6$ (Pa.s),

$\underline{\underline{\tau}}_g$ es el esfuerzo mecánico causado por el peso propio de la cabeza sobre el disco (Pa).

El cartílago sufre daños irreversibles cuando el módulo de la parte desviatoria del tensor de esfuerzos supera un valor característico del material. La parte desviatoria del tensor de esfuerzos se define como:

$$\underline{\underline{\tau}}_{desv} \equiv \underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{\delta}} \qquad (2)$$

($tr()$ es la traza). El daño irreversible tiene lugar cuando, $\left| \underline{\underline{\tau}}_{desv} \right| \geq \tau_{plast}$ donde $\tau_{plast} = 7.5 \times 10^8$ Pa.



En el sistema de ejes dado y escribiendo previamente el campo de velocidad dentro del material del disco

1. calcular el tensor de esfuerzos en el cartílago según la expresión (1) usando las variables dadas y escribirlo como matriz.
2. lo mismo para la parte desviatoria del tensor de esfuerzos según la expresión (2)
3. calcular a qué velocidad de impacto (m/s) sufre daño irreversible el cartílago, es decir, se alcanza el l plástico en esta colisión.
4. calcular qué error porcentual se comete si se ignora el peso de la cabeza en el cálculo anterior.

(45 min, 3 puntos)

Sol.: el campo de velocidad es lineal; en los ejes dados: $v_1(x_2) = v_c \dfrac{x_2}{H}$

$$\left(\underline{\nabla}\,\underline{v}\right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} v_j; \quad [\![\underline{\nabla}\,\underline{v}]\!] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{v_c}{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\![\underline{\underline{\dot{\gamma}}}]\!] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{v_c}{H} & 0 \\ \dfrac{v_c}{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y por tanto el esfuerzo durante la colisión es esta contribución más el peso de la cabeza, que produce un esfuerzo de compresión en dirección 2.

$$[\![\underline{\underline{\tau}}]\!] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{Kv_c}{H} & 0 \\ \dfrac{Kv_c}{H} & \dfrac{-4mg}{\pi D^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La parte desviatoria es, según (2):

$$[\![\underline{\underline{\tau}}_{desv}]\!] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{Kv_c}{H} & 0 \\ \dfrac{Kv_c}{H} & \dfrac{-4mg}{\pi D^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\left(\frac{-4mg}{\pi D^2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4mg}{3\pi D^2} & \dfrac{Kv_c}{H} & 0 \\ \dfrac{Kv_c}{H} & \dfrac{-8mg}{3\pi D^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4mg}{3\pi D^2} \end{bmatrix}$$

y su módulo:

$$\left|\underline{\underline{\tau}}_{desv}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{\tau}}_{desv} : \underline{\underline{\tau}}_{desv}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{Kv_c}{H}\right)^2 + 2\left(\frac{4mg}{3\pi D^2}\right)^2 + \left(\frac{-8mg}{3\pi D^2}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{K^2 v_c^2}{H^2} + \frac{16}{3}\frac{m^2 g^2}{\pi^2 D^4}}$$

El daño irreversible ocurrirá cuando se alcanza el valor de v_c que satisface: $\dfrac{K^2 \cdot v_c^2}{H^2} + \dfrac{16}{3}\cdot\dfrac{m^2 \cdot g^2}{\pi^2 \cdot D^4} = \tau_{plast}^2$

$$v_c = \sqrt{\tau_{plast}^2 - \frac{16}{3}\cdot\frac{m^2 \cdot g^2}{\pi^2 \cdot D^4}}\cdot\frac{H}{K} \quad \text{m/s} \qquad v_c = 4.375 \ \text{m/s}$$

Si se desprecia el peso de la cabeza (es decir, se hace m=0 en la expresión anterior), se obtiene

$$v_{c\_aprox} = \tau_{plast} \cdot \frac{H}{K}$$

El error cometido (porcentual) es muy pequeño: $\frac{v_c - v_{c\_aprox}}{v_c} \cdot 100 = -4.817 \times 10^{-8}$

Y por tanto es perfectamente admisible despreciar el peso de la cabeza en este caso.

Problema 2

Nombre: **Número de matrícula:**

Un recipiente de seguridad para líquidos inflamables se fabrica de un material compuesto y aislante eléctricamente, C, hecho de dos capas. La primera (C1) es una lámina de un polímero P (isótropo) que actúa como barrera a la difusión del oxígeno; la segunda (C2) da resistencia mecánica y es un tejido de fibras de Kevlar tipo "angle-ply" cuya geometría se indica en la figura (para C2, considerar que todas las fibras son iguales). Se conocen los siguientes datos:

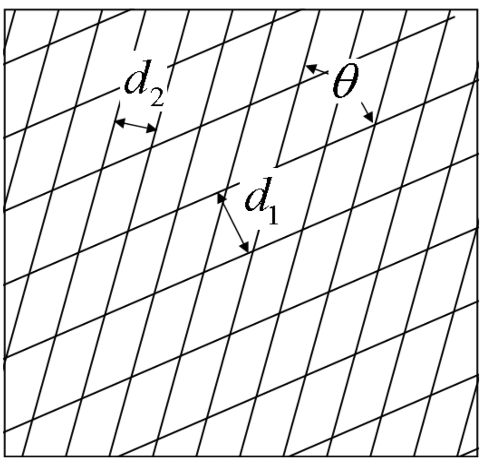
- masa de un metro de fibra de Kevlar: $m_K = 5.3 \times 10^{-3}$ kg/m.
- precio de un metro de fibra de Kevlar: $p_K = 0.015$ €/m.
- densidad de P: $\rho_P = 530$ kg/m^3.
- precio de P: $p_P = 5.3$ €/kg.
- distancias entre fibras: $d_1 = 8.1 \times 10^{-3}$ m , $d_2 = 1 \times 10^{-3}$ m.
- ángulo entre las fibras: $\theta = 23$ º.
- espesores de las capas C1 y C2: $\delta_{C1} = 1.5 \times 10^{-3}$ m, $\delta_{C2} = 1.6 \times 10^{-3}$ m.
- rigidez dieléctrica del compuesto C: $E_{max} = 1.4 \times 10^{6}$ V/m.
- difusividad másica del oxígeno en C1: $D_{C1} = 1.4 \times 10^{-10}$ m^2/s.
- difusividad másica del oxígeno en C2 (referida a ejes convencionales, y medida en m^2/s):

$$D_{C2} = \begin{pmatrix} 3.2 \times 10^{-9} & 0 & -4.4 \times 10^{-10} \\ 0 & 4.4 \times 10^{-10} & 0 \\ -4.4 \times 10^{-10} & 0 & 5.412 \times 10^{-10} \end{pmatrix}.$$

1. calcular la masa de un metro cuadrado de C (densidad superficial, en kg/m^2),
2. calcular qué diferencia de potencial máxima puede establecerse entre el interior y el exterior del recipiente sin que haya una descarga eléctrica a través de la pared.
3. calcular el precio del compuesto C por metro cuadrado (€/m^2)
4. determinar la difusividad del material C en dirección perpendicular a las capas.

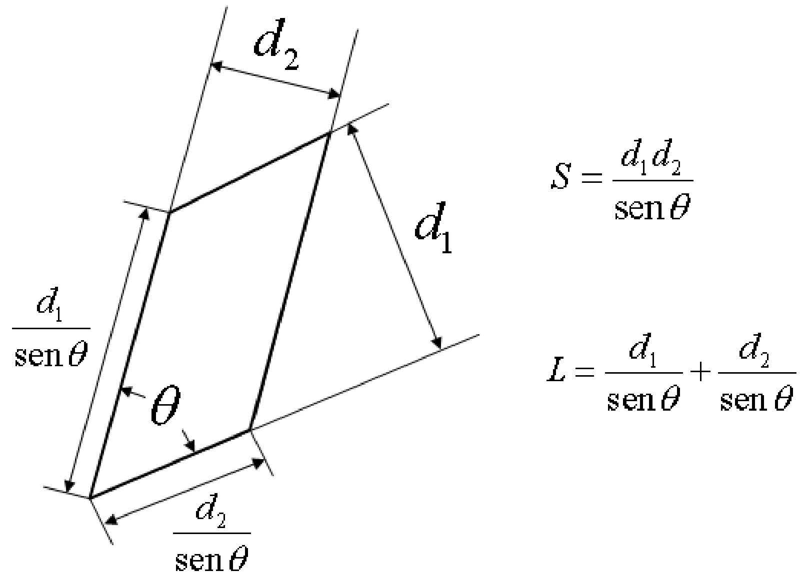
(45 minutos, 3 puntos)

capa C2 (tejido)



Sol.: en primer lugar se puede calcula la cantidad de fibra de Kevlar que contiene una celda como la de la figura. Esta celda tiene un área $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{sen\left(\theta \cdot \dfrac{\pi}{180}\right)}$**, y contiene una longitud total de fibra** $L = \dfrac{d_1}{sen\left(\theta \cdot \dfrac{\pi}{180}\right)} + \dfrac{d_2}{sen\left(\theta \cdot \dfrac{\pi}{180}\right)}$ **(cada lado de la celda aporta sólo 1/2 fibra a la celda. La otra media fibra de cada lado se comparte con la celda vecina).**

$S = 2.073 \times 10^{-5}$ m^2 $\qquad$ $L = 0.023$ m



Por tanto, 1 m^2 de C2 tiene una masa de: $m_{C2} = L \cdot m_K \cdot \dfrac{1}{S}$ $\qquad$ $m_{C2} = 5.954$ kg/m^2

y un m^2 de C1 tiene una masa de: $m_{C1} = 1 \cdot \delta_{C1} \cdot \rho_P$ $\qquad$ $m_{C1} = 0.795$ kg/m^2

La densidad superficial de C es la suma de las dos contribuciones:

$$m = m_{C1} + m_{C2} \qquad m = 6.749 \text{ kg/m}^2$$

La máxima diferencia de potencial se obtiene directamente de la rigidez dieléctrica de C (máximo campo que puede aguantar) y de su espesor:

$$V_{max} = E_{max} \cdot \left(\delta_{C1} + \delta_{C2}\right) \qquad V_{max} = 4.34 \times 10^3 \text{ V}$$

El precio de 1 m^2 de C se obtiene directamente de la masa de C1 y la longitud de C2 en 1 m^2 de C2

$$p = L \cdot p_K \cdot \frac{1}{S} + m_{C1} \cdot p_P \qquad p = 21.065 \text{ €/m}^2$$

C1 y C2 están en serie en la dirección perpendicular a las capas. En este caso, la regla de mezcla para difusividad (conductividad generalizada) es la armónica (Reuss).

Puesto que la capa C2 es monoclínica (tiene un eje binario perpendicular al papel, que es plano de simetría, clase 2/m) el eje 2 convencional es perpendicular a las fibras (al plano del papel). La difusividad de C2 en esta dirección está dada por la componente 2,2. La capa C1 es isótropa, su D es igual en todas direcciones. Por tanto, en la dirección pedida:

$$D_C = \left[\frac{\delta_{C1}}{\delta_{C1} + \delta_{C2}} \cdot D_{C1}^{-1} + \frac{\delta_{C2}}{\delta_{C1} + \delta_{C2}} \cdot \left(D_{C2_{2,2}} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

$$D_C = 2.16 \times 10^{-10} \quad \mathrm{m^2/s}$$