EXAMEN DE ESTADISTICA. Junio de 2013

A) CUESTIONES

Elegir 5 entre las 6 cuestiones siguientes. 0.8 puntos cada una.

1. Sean X $Normal(\mu_1, \sigma_1)$ e Y $Normal(\mu_2, \sigma_2)$ v.a. independientes. Se considera una m.a.s. de la primera de tamaño n y una m.a.s. de la segunda de tamaño m. Obténgase razonadamente la distribución de

$$\frac{S^2_{n-1}/\sigma_1^2}{S^2_{m-1}/\sigma_2^2}$$

siendo S^2_{n-1} y S^2_{m-1} las correspondientes cuasivarianzas muestrales.

2. Para m.a.s. de tamaño n de una población con distribución $Uniforme(0, \theta)$, con $\theta > 0$ encuéntrese un estadístico suficiente para θ.

3. Si $\hat{\theta}(X)$ es un estimador de un parámetro positivo θ con error cuadrático medio $ECM_\theta(\hat{\theta}(X)) = \theta^2/\sqrt{n}$, ¿puede asegurarse que $\hat{\theta}(X)$ es consistente? ¿por qué?

4. Enúnciese, sin demostrarla, la Cota de Fréchet-Cramér-Rao y explíquese su significado.

5. Diferencia entre intervalo de grado de confianza $1-\alpha$ e intervalo bayesiano (o creible) de probabilidad $1-\alpha$.

6. Para un test de hipótesis defínanse: la función de potencia, el error de tipo I y el error de tipo II.

B) PROBLEMAS

1. Para m.a.s. de tamaño n de una población con función de densidad exponencial de parámetro θ dada por

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x), \quad \text{con} \quad \theta > 0$$

$$(E[X] = 1/\theta \quad V[X] = 1/\theta^2)$$

se pide:

(a) (1 punto) Encuéntrese el estimador de máxima verosimilitud (EMV) para θ.

(b) (1 punto) ¿Es dicho estimador suficiente para θ? ¿es minimal suficiente?

(c) (1 punto) Calcúlese la cota de Fréchet-Cramér-Rao para los estimadores centrados de $h(\theta) = \theta$ ¿Se puede afirmar, a través de la cota obtenida, que el EMV es el estimador centrado de uniformemente mínima varianza (ECUMV) para θ?

2. Para m.a.s. de tamaño 20 de una población con distribución de $Poisson(\theta)$, dada por la función de masa

$$p(x|\theta) = e^{-\theta}\theta^x/(x!), \quad \text{con} \quad x = 0, 1, 2, \cdots \quad \text{y} \quad \theta > 0.$$

se pide:

(a) (1 punto) La distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud de θ, mediante élla constrúyase un intervalo de grado de confianza $1 - \alpha$ para θ.

(b) (1 punto) Obténgase el test de la razón de verosimilitudes, de tamaño α, para contrastar $H_0 : \theta = 2$ frente a $H_1 : \theta = 3$.

(c) (1 punto) Si se supone que la distribución inicial (o prior) sobre θ es $\pi(\theta) = e^{-\theta} I_{(0,\infty)}(\theta)$ determínese el estimador bayesiano, media de la distribución final de θ.