

# AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen final: 3 de febrero de 2015

1.- Calcula la serie de Fourier de la función:

$$f(x) = x^3, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

2.- Calcula la transformada de Fourier de la convolución  $f * g$ , con  $f(x) = x\chi_{[-\pi, \pi]}(x)$ ,  $g(x) = \cos(x)\chi_{[-\pi, \pi]}(x)$ .

3.- Calcula las funciones  $x(t)$  y  $y(t)$  que verifican el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} 2x'(t) + y(t) &= 1 \\ x(t) + 2y'(t) &= t \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $y(0) = 1$ .

(Indicación: Aplica la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema, resuelve el sistema en transformadas y después resuelve los problemas inversos que aparecen).

4.- Resuelve el sistema de congruencias:

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 7 \pmod{10} \\ 2x &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned} \right\}$$

5.-

- a) Encuentra un subgrupo de orden 4 en el grupo  $(\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3, +)$ .
- b) ¿Cuántos subgrupos de orden 5 tiene el grupo anterior?

6.- Sea  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ .

- a) Calcula su característica, su cardinal y justifica si es o no un cuerpo.
- b) Lista dos elementos de  $\mathbb{F}^*$  que sean generadores.
- c) Halla el inverso y una raíz cuadrada de  $[x]$  en  $\mathbb{F}$ .

## Observaciones:

- En el examen sólo se puede utilizar papel y bolígrafo
- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.
- Cada pregunta se puntúa con un máximo de 1,5 puntos.
- La revisión del examen será el próximo martes 10 de febrero a las 17h en el aula 2.

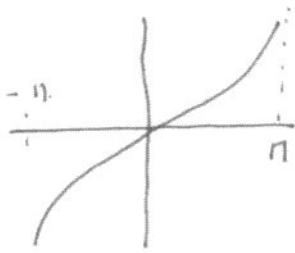
The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white starburst effect behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$f(x) = x^3, \quad x \in [-\pi, \pi]$$



$f$  es una función IMPAR

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Luego sus coeficientes no serán  
 $a_n$  y  $a_n$  no son nulos.

Por otro lado

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \operatorname{sen} nx \, dx =$$

$$= \frac{-x^3 \operatorname{cos} nx}{\pi n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{cos} nx \, dx =$$

Integrando  
 por partes.

$$= \frac{1}{\pi n} \left[ -\pi^3 \operatorname{cos} n\pi + (-\pi)^3 \operatorname{cos} n\pi + 3 \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{cos} nx \, dx \right]$$

$$= -\frac{2}{\pi} \pi^2 (-1)^n + \frac{3}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{cos} nx \, dx =$$

Integrando  
 por partes

$$= -\frac{2}{\pi} \pi^2 (-1)^n + \frac{3}{\pi n} \left[ x^2 \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \right]$$

$$= -\frac{2}{\pi} \pi^2 (-1)^n - \frac{6}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx =$$

Integrando  
 por partes

$$= -\frac{2}{\pi} \pi^2 (-1)^n - \frac{6}{\pi n^2} \left[ -x \frac{\operatorname{cos} nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{cos} nx \, dx \right]$$

$$= -\frac{2}{\pi} \pi^2 (-1)^n - \frac{6}{\pi n^2} \left[ -\frac{\pi}{n} 2 (-1)^n + \frac{1}{n} 0 \right] =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$2:] \quad \widehat{f * g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) \cdot \widehat{g}(\lambda)$$

LA CONVULSIÓN SE CONVIERTE EN UN PRODUCTO AL APLICAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER. ASÍ

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-z\lambda x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \lambda x dx - z \int_{-\pi}^{\pi} x \sin \lambda x dx$$

POR SER  $f(x) = x$  IMPAR, LA PRIMERA INTEGRAL ES NULA

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin \lambda x dx \stackrel{\substack{\text{INTEGRAR} \\ \text{POR PARTES}}}{=} -\frac{x \cos \lambda x}{\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda x dx =$$

$$= -\frac{\pi \cos \lambda \pi}{\lambda} - \frac{\pi (-1) \cos \lambda \pi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] =$$

$$= -\frac{2\pi \cos \lambda \pi}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \sin \lambda \pi$$

$$\text{LUEGO } \widehat{f}(\lambda) = \frac{2z}{\lambda} \left[ \pi (-1) \cos \lambda \pi - \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} \right]$$

$$\text{POR LO TANTO } \widehat{g}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} (-1)^x e^{-z\lambda x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} (-1)^x \cos \lambda x dx - z \int_{-\pi}^{\pi} (-1)^x \sin \lambda x dx$$

COMO EL COS X ES UNA FUNCIÓN PAR LA SEGUNDA INTEGRAL ES NULA Y ASÍ

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-1)^x \cos \lambda x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(x(1+z)) + \cos(x(1-z))) dx =$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

**Cartagena99**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f * g\}(s) &= \hat{f}(s) \hat{g}(s) = \\
 &= \frac{2s}{s} \left[ \pi \cos \pi - \frac{\sin \pi}{s} \right] \cdot \frac{e^s}{1-s^2} \sin \pi = \\
 &= \frac{4}{1-s^2} \cdot \left[ \pi \cos \pi \sin \pi - \frac{\sin^2 \pi}{s} \right] = \\
 &= \frac{4}{1-s^2} \cdot \left[ \frac{\pi}{2} \sin \pi - \frac{\sin^2 \pi}{s} \right]
 \end{aligned}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$3: \begin{cases} 2x'(t) + y(t) = 1 \\ x(t) + 2y'(t) = t \\ x(0) = 0 \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

APLICANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A LAS DOS ECUACIONES DEL SISTEMA

$$L(2x'(t) + y(t))(s) = L(1)(s)$$

$$L(x(t) + 2y'(t))(s) = L(t)(s)$$

$$\Leftrightarrow 2sLx(s) + Ly(s) = \frac{1}{s}$$

$$Lx(s) + 2(sLy(s) - y(0)) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow 2sLx(s) + Ly(s) = \frac{1}{s}$$

$$Lx(s) + 2sLy(s) = \frac{1}{s^2} + 2$$

ESTE ES UN SISTEMA LINEAL CON COEFICIENTES CONSTANTES.

LUEGO APLICANDO LA REGLA DE Cramer LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ES

$$Lx(s) = \frac{1}{4s^2 - 1} \begin{vmatrix} \frac{1}{s} & 1 \\ \frac{1}{s^2} + 2 & 2s \end{vmatrix} = \frac{2 - \frac{1}{s^2} - 2}{4s^2 - 1} = \frac{-\frac{1}{s^2}}{4s^2 - 1} =$$

$$= \frac{-1}{s^2(2s-1)(2s+1)}$$

$$Ly(s) = \frac{1}{4s^2 - 1} \begin{vmatrix} 2s & \frac{1}{s} \\ 1 & \frac{1}{s^2} + 2 \end{vmatrix} = \frac{\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}}{4s^2 - 1} = \frac{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}}{4s^2 - 1} =$$

$$= \frac{1 + 4s^2}{s(4s^2 - 1)} = \frac{1 + 4s^2}{s(2s+1)(2s-1)}$$

AHORA RESOLVIMOS EL PROBLEMA INVERSO;

$$\dots + \frac{A}{s} + \frac{B}{2s-1} + \frac{C}{2s+1} = \frac{-1}{s^2}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$4B - C + D = 0$$

$$4B - C + D = 0 \Rightarrow C = -D$$

$$y C = 2$$





part. m. l. c. r. s. b. s. r.

$$Lx(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{2s+1} - \frac{2}{2s-1} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1/2} - \frac{1}{s-1/2} \quad \text{y usar como}$$

las tablas part. m. q. l. e.

$$x(t) = t + e^{-1/2t} - e^{1/2t}$$

Ahora

$$Ly(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s+1} + \frac{C}{2s-1} = \frac{1+4s^2}{s(2s+1)(2s-1)}$$

$$\text{Así} \quad A(4s^2-1) + s(2s-1)B + s(2s+1)C =$$

$$= 4s^2A - A + 2s^2B - sB + 2s^2C + sC = 1 + 4s^2$$

$$\text{y por tanto} \quad -A = 1 \quad A = -1$$

$$-B + C = 0 \quad B = C$$

$$4A + 2B + 2C = 4$$

$$-2 + 4B = 4$$

$$B = 2 = C$$

part. m. l. c. r. s. b. s. r.

$$Ly(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{2s+1} + \frac{2}{2s-1} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1/2} + \frac{1}{s-1/2}$$

y usar como las tablas se trata q. l. e.

$$y(t) = -1 + e^{-1/2t} + e^{1/2t}$$

Comprobación: observar m. q. l. e.

$$x(0) = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$x'(0) = 1 + 1 + 1 = 3$$

(verlo las derivadas)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$x(t) + y(t) = e^{-1/2t} + e^{1/2t}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{10} \\ 2x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{10} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{10} \\ x \equiv 3 \times 4 \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

APLICANDO EL TEOREMA CHINO RTD RESOLV.

NECESITAMOS CALCULAR

$$(10 \times 7)^{-1} \in (\mathbb{Z}_3 \times)$$

$$70 \equiv 1 \pmod{3}, \text{ luego } (10 \times 7)^{-1} = 10 \times 7 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$(3 \times 7)^{-1} \in (\mathbb{Z}_{10} \times)$$

$$3 \times 7 = 21 \equiv 1 \pmod{10} \text{ luego } (3 \times 7)^{-1} = 3 \times 7 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$Y (3 \times 10)^{-1} \in (\mathbb{Z}_7 \times)$$

$$30 \equiv 2 \pmod{7} \text{ luego } (30)^{-1} \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\text{ASÍ } x = 1 \times 70 \times 1 + 7 \times 21 \times 1 + 5 \times 30 \times 4 =$$

$$= 70 + 147 + 600 = 817$$

O VALOR OTRO CON GARANTÍA:  $817 \pmod{7 \times 10 \times 3} = 210$

$$\text{COMO } \begin{array}{r} 817 \\ 187 \\ \hline 3 \end{array} \begin{array}{r} 210 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

5:] a) El elemento  $7 \in \mathbb{Z}_{28}$

tiene orden 4;

$$\{7, 7+7, 7+7+7, 7+7+7+7\} =$$

$$= \{7, 14, 21, 0\} \text{ es un subgrupo}$$

de orden 4 de grupo  $(\mathbb{Z}_{28}, +)$

Así el elemento  $(4, 0) \in \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3$

es un elemento de orden 4 en  $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3$   
y el subgrupo que genera es de orden 4

$$\{(7, 0), (14, 0), (21, 0), (0, 0)\}$$

b)  $|\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3| = 28 \times 3 = 4 \times 7 \times 3 = 2^2 \times 7 \times 3.$

Como 5 no divide a  $28 \times 3$ , el teorema

de Lagrange nos dice que  $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_3 \not\cong$   
tiene subgrupos de orden 5.

6:]  $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$  como es un binomio de  
orden 3 y  $f(0) = 1 \neq 0$  y  $f(1) = 1 \neq 0$ , es irreducible  
no tiene raíces en  $\mathbb{Z}_2$  es irreducible.

a) Por tanto  $\mathbb{Z}_2[x]/f$  es un cuerpo de característica

$$|\mathbb{Z}_2[x]/f| = 2^{\text{Grad } f} = 2^3 = 8.$$

La característica de  $\mathbb{Z}_2$  es 2, por tanto la de  
también es 2.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



c) SE PUEDE HACER ESTE ABRAZADO  
 CALCULANDO LA TABLA DE MULTIPLICAR  
 DE  $\mathbb{F}^*$  (SOLAMENTE 7 ELEMENTOS) Y  
 BUSCAR EN ELLA  $[x]^{-1}$  Y  $\sqrt{[x]}$ .

DE FORMA MÁS OBSERVE

$$0 = [x^3 + x + 1] = [x]^3 + [x] + 1 \quad \text{ASÍ}$$

$$-1 = 1 = [x]^3 + [x] = ([x]^2 + 1)[x].$$

$$\boxed{\text{LUEGO } [x]^2 + 1 = [x]^{-1}}$$

PARA CALCULAR  $\sqrt{[x]}$  NECESITAMOS ENCONTRAR

$$y \in \mathbb{F}^* = \{1, [x], [x] + 1, [x]^2, [x]^2 + 1, [x]^2 + [x], [x]^2 + [x] + 1\}$$

DE MODO QUE  $y^2 = [x]$

COMO ESTAMOS EN UN CASO DE CARACTERÍSTICA 2.

$$\text{SÍ } y^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2.$$

ENTONCES  $y = [x]^2 + [x]$

$$y^2 = ([x]^2 + [x])^2 = [x]^4 + [x]^2 = [x]([x]^3 + [x]) = [x](-1) = [x].$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70