AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen de Febrero; VII-Febrero-2012

1.- Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $x \in (-\pi, \pi)$. Usa lo anterior para comprobar que

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}.$$

2.- Calcula la transformada de Fourier de la función $f(t) = tx(t)$ siendo

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ -e^{at} & t < 0 \end{cases}$$

y a un número real positivo.

3.- Resuelve el siguiente problema de valor inicial usando la Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

4.- Resuelve el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ 2x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

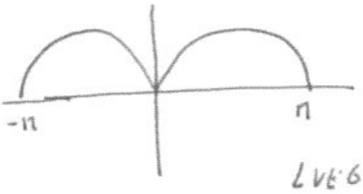
5.- Calcular el resto obtenido al dividir 125^{4577} entre 13.

6.- Se considera el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2x + 4)$. Sea $\alpha = [x] \in \mathbb{F}$. Calcula el inverso del elemento $\alpha^{73} + \alpha^2 + \alpha + 2$ en $\mathbb{F}$.

Observaciones:

.- Una vez comenzado el examen, no se podrá salir del mismo antes de 40 minutos.
.- Cada pregunta se puntua con un máximo de 1,5 puntos.
.- La **revisión del examen** será el próximo martes 14 de Febrero a las 14h en el aula 7.

PROBLEMA 1:] LA FUNCIÓN $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ $x \in (-\pi, \pi)$



ES UNA FUNCIÓN PAR

$$f(-x) = |\operatorname{sen} -x| = |-\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} x| = f(x)$$

LUEGO AL CALCULAR SUS COEFICIENTES DE FOURIER

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x| \operatorname{sen} nx\, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx \underset{f\ \text{PAR}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x| \cos nx\, dx \underset{f\ \text{PAR}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx$$

AHORA

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \operatorname{sen} x\, \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos x \operatorname{sen} nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos x \cdot \operatorname{sen} nx\, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{\cos x \cdot \cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx$$

DESPEJANDO

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx = \frac{1}{n^2}\left(\cos \pi \cos n\pi - 1\right) = \frac{1}{n^2}\left((-1)^{n+1} - 1\right).$$

ASÍ

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx = \frac{1}{1-n^2}\left((-1)^{n+1} - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \\ \dfrac{-2}{1-n^2} & n \text{ ES PAR} \end{cases}$$

ERRATA: n ES IMPAR

LUEGO

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\left((-1)^{n+1} - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{SI} \\ \dfrac{-4}{\pi(1-n^2)} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \end{cases}$$

ES.

LUEGO LA SERIE DE FOURIER DE f

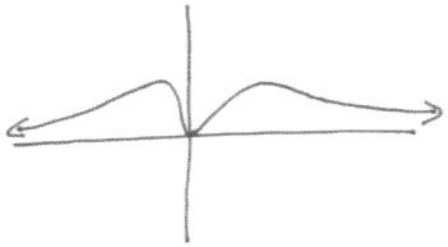
$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(1-4k^2)} \cos 2kx.$$

f TIENE ... ES 2π- PERIÓDICA Y CONTINUA EN $[-\pi,\pi]$; $f(\pi^+) = f(\pi^-)$

$$\frac{1}{2} = \sum^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

PROBLEMA 2:

$$f(t) = t\,x(t) = \begin{cases} t e^{-at} & t>0 \\ -t e^{at} & t<0 \end{cases}$$



$$f(-t) = \begin{cases} t e^{-at} & t>0 \\ -t e^{at} & t<0 \end{cases} = f(t).$$

LUEGO f ES UNA FUNCIÓN PAR.

LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE f

ES $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st\, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st\, dt.$$

POR SER f PAR $\quad f(t) \operatorname{sen} st$ ES IMPAR Y ASÍ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} st\, dt = 0$$

LUEGO $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st\, dt =$

$f(t) \cos st$ PAR

$$= 2\int_0^{\infty} f(t) \cos st\, dt = 2\int_0^{\infty} t e^{-at} \cos st\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\infty} t\, e^{-at}\left(\frac{e^{ist}+e^{-ist}}{2}\right) dt$$

$$= \int_0^{\infty} t\, e^{-(a-is)t} dt + \int_0^{\infty} t\, e^{-(a+is)t} dt \underset{\text{POR PARTES}}{=}$$

$$= \left. t\frac{e^{-(a-is)t}}{-(a-is)}\right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a-is)t}}{a-is} dt + \left.\frac{t\,e^{-(a+is)t}}{-(a+is)}\right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a+is)t}}{(a+is)} dt$$

$$\frac{(a+is)^2 + (a-is)^2}{(a-is)^2(a+is)^2} = \frac{2(a^2-s^2)}{((a-is)(a+is))^2} = \frac{2(a^2-s^2)}{(a^2+s^2)^2}$$

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

APLICANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$\mathcal{L}(y'' - 3y' + 2y)(s) = \mathcal{L}(e^{3x})(s)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}y''(s) - 3\mathcal{L}y'(s) + 2\mathcal{L}y(s) =$$

$$= s^2\mathcal{L}y(s) - s\,y(0) - 3(s\mathcal{L}y(s) - 1) + 2\mathcal{L}y(s) =$$

$$= \mathcal{L}(e^{3x})(s) = \frac{1}{s-3}$$

LUEGO $(s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}y(s) - s + 3 = \frac{1}{s-3}$

ASÍ $\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}\left[s-3 + \frac{1}{s-3}\right] =$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-2)}\left[\frac{(s-3)^2+1}{s-3}\right] =$$

$$= \frac{s^2-6s+10}{(s-1)(s-2)(s-3)} \underset{\downarrow}{=} \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

ASÍ $A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2) =$

$$= As^2 - 5sA + 6A + Bs^2 - 4sB + 3B + Cs^2 - 3sC + 2C = s^2 - 6s + 10$$

LUEGO

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ -5A - 4B - 3C = -6 \\ \dots = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 1 \\ B + 2C = -1 \\ -3B - 4C = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 1 \\ B + 2C = -1 \\ 2C = 1 \end{cases}$$

LAPLACE RESULTA QUE

$$y(x) = \frac{5}{2}e^{x} - 2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

PROBLEMA 4: El sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 5 \\ 2x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 11 \end{cases} \qquad 2^{-1} \equiv 2 \mod 3$$

El teorema chino del resto nos da la solución de este sistema de congruencias ya que 5, 3 y 11 son primos entre sí (algo más son tres números primos).

Hay que encontrar q_1, q_2 y q_3 con

$q_1 \cdot 33 \equiv 1 \mod 5$

$q_2 \times 55 \equiv 1 \mod 3$

y $q_3 \times 15 \equiv 1 \mod 11$ y el x buscado

será $x = 3 q_1 \times 33 + 2 q_2 \times 55 + 4 q_3 \times 15$

o cualquier otro $y \equiv x \mod 5 \times 3 \times 11 = 165$.

$m.c.d(5, 33) = 1$ buscamos una identidad de Bezout.

33 | 5 → cociente 6, resto 3

5 | 3 → cociente 1, resto 2

3 | 2 → cociente 1, resto 1

r	q	α	β
33		1	0
5		0	1
3	6	1	-6
2	1	-1	7
1	1	2	-13

Así $2 \times 33 - 13 \times 5 = 1$

y el q_1 buscado es 2

$m.c.d(55, 3) = 1$ luego $55 \equiv 1 \mod 3$.

55 | 3 → 25, 18 $55 - 18 \times 3 = 1$ y así $q_2 = 1$

$= 198 + 110 + 180 = 488$

$488 \equiv 158 \mod 165$ luego 158 es ...

PROBLEMA 5:) 125^{4577}

m.c.d $(125, 13) = 1$ (13 ES PRIMO). LA FUNCIÓN

DE EULER SOBRE 13, $\Phi(13) = 12$

POR EL TEOREMA DE EULER SI m.c.d$(a,b) = 1 \Rightarrow$

$a^{\Phi(b)} \equiv 1 \mod b.$

POR EL CALCULO DE CONGRUENCIAS.

SI $125^{4577} = k \times 13 + r$ $\quad r < 13$ (RESTO).

ENTONCES $125^{4577} \equiv r \mod 13$

POR OTRA PARTE

$$\begin{array}{r|l} 4577 & 12 \\ \hline 097 & 381 \\ 017 & \\ 5 & \end{array}$$

LUEGO $125^{4577} = 125^{12 \times 381 + 5} =$

$= (125^{12})^{381} \cdot 125^5 \equiv 125^5 \mod 13.$

YA QUE $125^{12} \equiv 1 \mod 13.$

POR OTRO LADO $125^5 = (5^3)^5 = 5^{15} = 5^{12+3} \equiv 5^3 \mod 13$

$5^3 = 125$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 13 \\ \hline 08 & 9 \end{array}$$

LUEGO $125 \equiv 8 \mod 13$

ASI $125^{4577} \equiv 125^5 \equiv 125 \equiv 8 \mod 13$

POR TANTO EL r BUSCADO ES $\underline{\underline{8}}$

PROBLEMA 6:) $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/x^2+2x+4$ ES UN CUERPO, YA QUE

x^2+2x+4 ES IRREDUCIBLE EN $\mathbb{Z}_5[x]$ ($x = 0, 1, 2, 3$ ó 4

... POLINOMIO ... COMO SE COMPRUEBA ...

COMO ... EN $\mathbb{F}$ EL INVERSO DE $-2 \in \mathbb{Z}_5$

$\alpha^{13} ... = -2$ EN $\mathbb{F}$