Apellidos: **Computadores** ☐

Nombre: **Software** ☐

Estadística. 1º examen parcial. 16-10-2013

Test (20 % de la nota del examen)

- Tiempo para este examen: 2 h.
- El test se recogerá a los 30 minutos.
- En cada pregunta de test, una y sólo una de las respuestas (a), (b) y (c) es cierta. Poner la letra elegida o dejar en blanco.
- Calificación: acierto = +1, fallo = −1/2 y blanco = 0.

Sean X e Y son dos variables estadísticas. Si $\mathrm{CV}(X) \simeq \mathrm{CV}(Y) = 0.68$, $V(X) = 3246$ y $\mathrm{dt}(Y) = 33$, entonces:

(a) X es menos dispersa que Y.

(b) X e Y tienen aproximadamente la misma dispersión.*

(c) X es más dispersa que Y.

Si se lanza un dado, entonces los sucesos "sacar menos de 4" y "sacar múltiplo de 3" son:

(a) Compatibles y dependientes.

(b) Compatibles e independientes.*

(c) Incompatibles y dependientes.

Sean A, B y C sucesos tales que $p(A) = 0.8$, $p(B) = 0.6$ y $p(C) = 0.5$. Se puede afirmar con seguridad que:

(a) $p(A \cap B \cap C) > 0$

(b) $p(A \cap B) + p(A \cap C) + p(B \cap C) \geq 0.8$*

(c) $p(A \cup B \cup C) = 1$

Se tienen 10 piezas, de las cuales 7 son defectuosas. Si se eligen 2 piezas al azar, entonces la probabilidad de que exactamente 1 sea defectuosa vale:

(a) $\dfrac{21}{10 \cdot 9}$

(b) $\dfrac{21}{\binom{10}{2}}$*

(c) $\dfrac{7}{\binom{10}{2}}$

Sea X una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2/3 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

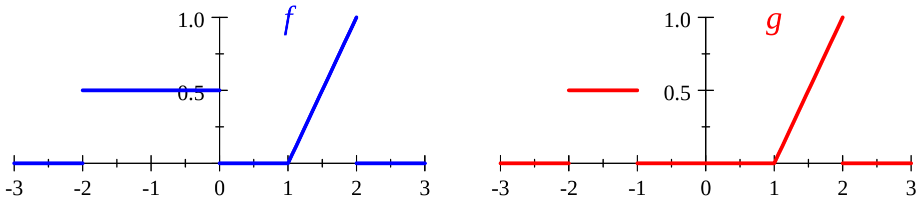
La probabilidad $p(2 < X < 5)$ vale:

(a) $1/3$*

(b) $2/3$

(c) 1

Las funciones f y g, cuyas gráficas se adjuntan, verifican:



(a) f es de densidad y g es de distribución.

(b) f es de distribución y g es de densidad.

(c) f no es de densidad ni de distribución, pero g es de densidad.*

ESTADÍSTICA **16/10/2013** **Primer examen parcial**

Teoria (10%) Se consideran la variable aleatoria X y las constantes a y b. Demostrar que $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Problema 1 (35%) Se lanzan 6 monedas simultaneamente y a continuación se selecciona una palabra de la frase:

To be or not to be. Shakespeare.

Siguiendo el siguiente criterio: si en ninguna de las monedas sale cara, se selecciona la palabra Shakespeare. Si salen entre 1 y 6 caras, se selecciona la palabra que ocupa en la frase la posición que indica el número de caras obtenido. Una vez seleccionada la palabra, se elige una letra al azar de dicha palabra. Se pide:

a) (6 puntos) Probabilidad de obtener la letra “o”.
b) (4 puntos) Probabilidad de que la palabra seleccionada sea “To”, sabiendo que se ha seleccionado la letra “o”.

Problema 2 (35%) Sea X una variable aleatoria que mide la envergadura de cierto tipo de aves adultas de una misma especie, en metros, con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } 1 < x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Obtener *k* para que f sea función de densidad.
b) *(3 puntos)* Obtener la función de distribución de X. Comprobar que verifica las propiedades de función de distribución.
c) *(1 punto)* Calcular la probabilidad de que la envergadura de un ave adulta de esta especie sea de más de 2 metros, si sabemos que por lo menos es de metro y medio.
d) *(1 punto)* Si se eligen tres aves al azar, calcular la probabilidad de que alguna tenga una envergadura de más de metro y medio.
e) *(2 puntos)* Se sabe que el peso, en kg, para estas aves adultas, Y, está relacionado con la envergadura mediante la función Y = 3X + 1. Calcular el peso medio de un ave adulta.
f) *(2 puntos)* Con intención de proteger esta especie de aves, la captura de ejemplares adultos vivos de envergadura inferior a metro y medio se paga a 300 euros por ejemplar, mientras que por cada uno de los demás se pagan 500 euros. Obtener el precio medio pagado por ejemplar.

ESTADÍSTICA · **16/10/2013** **Primer Parcial**

Problema 1 (35%) Se lanzan 6 monedas simultaneamente y a continuación se selecciona una palabra de la frase

To be or not To be. Shakespeare.

Siguiendo el siguiente criterio: si en ninguna de las monedas sale cara, se selecciona la palabra Shakespeare. Si salen entre 1 y 6 caras, se selecciona la palabra que ocupa la posición en la frase que indica el número de caras obtenido. Una vez seleccionada la palabra, se elige una letra al azar de dicha palabra. Se pide:

a) (6 puntos) Probabilidad de obtener la letra "o"

b) (4 puntos) Probabilidad de que la palabra seleccionada sea "To", sabiendo que se ha seleccionado la letra "o".

(a) Aplicamos el t$^{\underline{ma}}$ de la probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

donde

B := obtener la letra "o"

A_i := sacar "i" caras al lanzar las monedas.

$$P(B) = P(0)\cdot 0 + P(1)\cdot \frac{1}{2} + P(2)\cdot 0 + P(3)\cdot\frac{1}{2} + P(4)\cdot\frac{1}{3} + P(5)\cdot\frac{1}{2} + P(6)\cdot 0$$

$$= \frac{1}{2^6}\cdot\binom{6}{1}\cdot\frac{1}{2} + \binom{6}{3}\cdot\frac{1}{2^7} + \binom{6}{4}\frac{1}{2^6}\frac{1}{3} + \binom{6}{5}\cdot\frac{1}{2^7} = \frac{21}{2^6} = 0'328125$$

(b) $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, donde A es obtener 1 ó 5 caras

$$P(A\cap B) = \frac{1}{2}\binom{6}{1}\frac{1}{2^6} + \binom{6}{5}\frac{1}{2^7} = \frac{3}{2^5}$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{2}{7} = 0'2857$$

PROBLEMA 2

a) $k>0$ para que $f(x)\geq 0$ en $\mathbb{R}$. Además, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$1 = \int_1^2 k\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx \iff k+\frac{1}{2} = 1 \iff \boxed{k=\frac{1}{2}}$$

b) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}(x-1)$ si $1\leq x<2$

$$F(x) = \int_1^2 \frac{1}{2}\,dt + \int_2^x (t-2)\,dt = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2} \quad 2\leq x<3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & 1\leq x<2 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2} & 2\leq x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$$

F verifica las propiedades para ser función de distribución de una variable aleatoria continua:

1) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$

2) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

3) $F'(x) = \frac{1}{2} > 0$ en $1<x<2$, $F'(x) = x-2 > 0$ en $2<x<3$

F es monótona no decreciente en $\mathbb{R}$

4) F es continua en $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to1^-} F(x) = \lim_{x\to1^-} 0 = 0$

$\lim_{x\to1^+} F(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{2}(x-1) = 0$

$F(1) = 0$

$\lim_{x\to2^-} F(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to2^+} F(x) = \lim_{x\to2^+} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$F(2) = \frac{1}{2}$

De forma idéntica se comprueba que F es continua en $x=3$

c) $P\left(X>2 / X>1'5\right)=\dfrac{P(\{X>2\}\cap\{X>1'5\})}{P(X>1'5)}=$

$=\dfrac{P(X>2)}{P(X>1'5)}=\dfrac{1-F(2)}{1-F(1'5)}=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\boxed{\dfrac{2}{3}}$

d) S = alguna de las aves tiene una envergadura de más de $1'5$ m.

A_i = el ave i-ésima tiene una envergadura de más de $1'5$ m, $i=1,2,3$

$\overline{S}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3 \Rightarrow P(\overline{S})=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)=$

$=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3$ porque $P(\overline{A}_i)=\underset{F(1'5)}{\underset{\shortparallel}{P(X\leq 1'5)}}$

$\boxed{P(S)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{63}{64}}$

e) Pide $E[Y]=E[3X+1]=3E[X]+1$

$E[X]=\int_1^2 \frac{1}{2}\cdot x\,dx+\int_2^3 x(x-2)\,dx=\frac{25}{12}$

$E[Y]=3\cdot\frac{25}{12}+1=\frac{29}{4}=7'25$ Kg de media

f) Z: precio pagado por ejemplar. Z toma valores 300 y 500

$P(Z=300)=P(1<X<1'5)=F(1'5)=\frac{1}{4}$

$P(Z=500)=P(X\geq 1'5)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$E[Z]=300\cdot\frac{1}{4}+500\cdot\frac{3}{4}=\frac{1800}{4}=450$ € de media por ejemplar