AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen de Febrero; 6-Febrero-2013

1.- a) Estudia la convergencia de la sucesión de funciones $\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[1,2]$.
b) Calcula $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1-x^n}{1+x^n}dx$.

2.- Considera las dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ definidas por:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (-1,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (-1,1] \\ 2-x & \text{si} \quad x \in (1,3] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se pide: *i)* hallar la transformada integral de Fourier de $f_1(x)$; *ii)* dibujar $f_2(x)$ y calcular su transformada usando el resultado anterior junto con las propiedades de la transformada.

3.- Resuelve el siguiente problema de Cauchy usando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 15y = e^{-x+2} \\ \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

4.- En $(\mathbb{Z}_5 \text{x} \mathbb{Z}_6, +)$ encuentra un elemento de orden máximo distintinto del $(1,1)$. Razona la respuesta.

5.- Considera el conjunto de matrices

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{bmatrix} \text{ con } a, b, c \ \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

con las operaciones usuales de suma $+$ y multiplicación $\times$ entre matrices. Se pide: *i)* demostrar que $(\mathbf{R}, +, \times)$ es anillo conmutativo; determinar los elementos unidad y los divisores de cero en $(\mathbf{R}, +, \times)$.

6.- En $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3+x+1 \rangle$ halla el inverso multiplicativo de $[x]$ y de $[x+1]$. Usa los resultados obtenidos para determinar el inverso de $[x^2+x]$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Problema 1

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x=1 \\ -1 & \text{si} & x\in(1,2] \end{array} \right\} = f(x)$$

$f(x)$ es el límite puntual, que no es continua en $x=1$; como cada f_n es continua en $[1,2]$, no puede haber convergencia uniforme en todo el intervalo $[1,2]$.

¿Habrá convergencia uniforme en $[a,2]$ con $a>1$? Veámoslo.

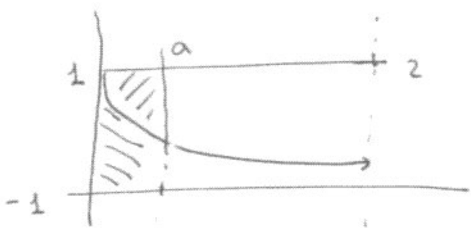
Gráfica de f_n:

$\text{Dom } f_n = [1,2]$, continua y $f_n \leq 1$

$$f_n'(x) = \frac{-n\,x^{n-1}(1+x^n) - (1-x^n)\,n\,x^{n-1}}{(1+x^n)^2} =$$

$$= -\frac{n\,x^{n-1}}{(1+x^n)^2}\left(1+x^n+1-x^n\right) = -\frac{2n\,x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \leq 0 \quad \text{luego } f_n \text{ es}$$

decreciente; $\quad f_n(1)=0 \quad$ y $\quad f_n(2) = \dfrac{1-2^n}{1+2^n} \geq -1$



Fijando $a>1$, como f_n es decreciente

$$\left|-1 - f_n(x)\right| \leq \left|-1 - f_n(a)\right| =$$

$$= 1 + \frac{1-a^n}{1+a^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Luego hay convergencia uniforme sobre $[a,2]$ con $a>1$

$$-1 < \int^2 \frac{1-x^n}{\dots} = \int^a \frac{1-x^n}{\dots} + \int^2 \frac{1-x^n}{1+x^n} \leq \int_a^2 \frac{1-x^n}{1+x^n}$$

Como ... es ...

$$\dots \int^2 \frac{1-x^n}{1+x^n} = -1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

EJERCICIO 2:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & si\ x\in[-1,1] \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x & si\ x\in(-1,1] \\ 2-x & si\ x\in(1,3] \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\hat{f}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, e^{-i\lambda x}dx = \int_{-1}^{1} x\, e^{-i\lambda x}dx \underset{partes}{=}$$

$$= \frac{x e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{i\lambda}\int_{-1}^{1} e^{-i\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{e^{-i\lambda}}{i\lambda} - \frac{e^{i\lambda}}{i\lambda} + \frac{1}{i\lambda}\left[\frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda}\Big|_{-1}^{1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{i\lambda}\left[\cos\lambda + i\cancel{sen\lambda} + \cos\lambda - i\cancel{sen\lambda}\right] +$$

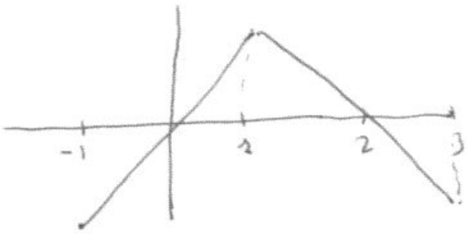
$$-\frac{1}{i^2\lambda^2}\left[e^{-i\lambda} - e^{i\lambda}\right] =$$

$$= -\frac{2}{i\lambda}\cos\lambda - \frac{1}{(-1)\lambda^2}\left[\cancel{\cos\lambda} - i\, sen\lambda - \cancel{\cos\lambda} - i\, sen x\right] =$$

$$= -\frac{2}{i\lambda}\cos\lambda + \frac{1}{\lambda^2}\left[-2i\, sen\lambda\right] =$$

$$= \frac{2i}{\lambda}\cos\lambda - \frac{2i}{\lambda^2}sen\lambda = \frac{2i}{\lambda}\left[\cos\lambda - \frac{sen\lambda}{\lambda}\right]$$

$f_2(x)$ se representa por



$$\Big|\ 2-x \quad si\ x\in(1,3]$$

$y = x-2$

$$= e^{i2\lambda}\int y\, e^{-i\lambda y}dy = e^{i2\lambda}\hat{f}_1(\lambda)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 15y = e^{-x}e^{2} \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

APLICANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$s^2 \mathcal{L}y(s) - 2s\mathcal{L}y(s) + 15\mathcal{L}y(s) = e^2 \mathcal{L}(e^{-x})(s) =$$

$$= \frac{e^2}{s+1}$$

LUEGO $\mathcal{L}y(s) = \dfrac{e^2}{(s+1)(s^2-2s+15)} \underset{\downarrow}{=}$

SEPARACIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

$s^2-2s+15$ IRREDUCIBLE

$$= e^2 \left[\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+15} \right] =$$

ASÍ $A(s^2-2s+15) + (s+1)(Bs+C) =$

$$= As^2 - 2sA + 15A + Bs^2 + (B+C)s + C =$$

$$= (A+B)s^2 + (-2A+B+C)s + (15A+C) = 1$$

ASÍ $A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$3B + C = 0 \Rightarrow C = -3B$

Y $15(-B) - 3B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{18}$, $A = \frac{1}{18}$ y $C = \frac{1}{6}$

$$= e^2 \left[\frac{1}{18}\,\frac{1}{s+1} + \frac{-\frac{1}{18}s + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} - \frac{1}{18}}{(s^2-2s+1)+(\sqrt{14})^2} \right] =$$

$$= \frac{e^2}{18}\,\frac{1}{s+1} - \frac{e^2}{18} \cdot \frac{s-1}{(s-1)^2+(\sqrt{14})^2} + \frac{e^2}{\ldots} \cdot \frac{1}{\ldots} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

PROBLEMA 4] Como $m.c.d(5,6)=1$

$$(\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6,+)\cong(\mathbb{Z}_{30},+) \text{ cíclico}$$

Por tanto, por ser cíclico existe un elemento con orden el orden del grupo en este caso 30.

$1\in\mathbb{Z}_{30}$ es un generador de orden 30 y por tanto $([1]_5,[1]_6)=(1,1)$ es un generador en $(\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6,+)$

Tomamos $7\in(\mathbb{Z}_{30},+)$ como $m.c.d(7,30)=1$, así $m.c.m.(7,30)=7\times 30$, luego 7 tiene orden 30 y $([7]_5,[7]_6)=(2,1)$ tiene orden 30 en $(\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6,+)$.

PROBLEMA 5: Sean $A, A'\in R$

$$A-A'=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ b & c & a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a' & 0 & 0\\ 0 & a' & 0\\ b' & c' & a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-a' & 0 & 0\\ 0 & a-a' & 0\\ b-b' & c-c' & a-a'\end{pmatrix}\in R$$

Luego $(R,+)$ es un subgrupo de $M_{3\times3}(\mathbb{Z}_2)$ que sabemos que es un anillo con unidad no conmutativo

Sean $A, A'\in R$

Si $A'\neq 0$, $A'=\begin{pmatrix} a' & 0 & 0\\ 0 & a' & 0\\ b & c & a'\end{pmatrix}$ con $a'=1\in\mathbb{Z}_2$

Observemos que $A'\cdot A'=I$ ya que $b'a'+a'b'=$
$=c'a'+a'c'=0$
$\forall a',b',c'\in\mathbb{Z}_2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

conmutativo; que $I\in R$ tiene unidad.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Si $A \in R$, y $A \neq 0$ y $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}$

Si $a \neq 0$ entonces existe A^{-1}, luego no es divisor de cero;

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ y sea $A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b' & c' & 0 \end{pmatrix}$

$AA' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ba & ca & 0 \end{pmatrix}$ luego si $a = 0$ y $b' \neq 0$ ó $c' \neq 0$

Se sigue que A es divisor de cero

Luego $R' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \in R \;\; b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ son

todos los divisores de cero de R'.

PROBLEMA 6: $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ es irreducible

ya que es de grado 3 y $f(0) = 1$
$f(1) = 3$
$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 4$.

Luego $\mathbb{Z}_5[x] / {x^3+x+1}$ es un cuerpo finito de

cardinal $5^3 = 125$.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x + 1 & x \\ \hline -x^3 & x^2+1 \\ \quad x & \\ \quad x & \\ \hline \quad\; 1 & \end{array}$$

Luego $x(x^2+1) + 1 = x^3 + x + 1$.

$\Leftrightarrow [x][x^2+1] + 1 = 0$

$\Leftrightarrow [x][x^2+1] = -1$

$\Leftrightarrow [x][4x^2+4] = 1$ $\times(-1)^{-1}$

Así $[x]^{-1} = [4x^2+4]$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$= (x^3+2x-1)(x^3+x+1) + (x^2-x+2)$

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$= 4x^2 + 2x + 3 = x^2 + 3x + 3$.