CEU
Universidad
San Pablo

Departamento de Tecnologías de la Información

Escuela Politécnica Superior
Curso 2013-2014

APELLIDOS:	NOMBRE:	DNI:	CALIFICACIÓN:
ASIGNATURA: Fundamentos Matemáticos de Ing. Biomédica 3	FECHA: 03/04/14	GRUPO:	

Primer parcial
Duración: 1 hora y 45 minutos

Problema 1: *1.5 puntos*

Considere las siguientes proposiciones:

- $P : (A \vee B) \implies C$
- $Q : (\neg C \implies \neg A) \vee (\neg C \implies \neg B)$

¿Cual de las siguientes opciones describe mejor la relación entre P y Q? Rodea con un círculo la respuesta correcta.

1. P y Q son equivalentes.
2. $P \implies Q$
3. $Q \implies P$
4. Todas las anteriores.
5. Ninguna de las anteriores.

Dibuje una o más tablas de verdad para ilustrar su razonamiento. Puede utilizar tantas columnas como crea conveniente.

Solución

Dibujamos la tabla de verdad para P:

A	B	C	$A \vee B$	P
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

Dibujamos la tabla de verdad para Q:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg C \implies \neg A$	$\neg C \implies \neg B$	Q
T	T	T	F	F	F	T	T	T

APELLIDOS:	NOMBRE:	DNI:	CALIFICACIÓN:
ASIGNATURA: Fundamentos Matemáticos de Ing. Biomédica 3	FECHA: 03/04/14	GRUPO:	

Problema 2: *1.5 puntos*

Responda a las siguientes preguntas:

1. Dados los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} Stark &= \{Rob, Sansa, Arya, Bran, Rickon\} \\ Lannister &= \{Jaime, Cersei, Tyrion, Joffrey\} \\ Baratheon &= \{Robert, Stannis, Joffrey\} \\ Targaryen &= \{Daenerys\} \\ Casas &= \{Stark, Lannister, Baratheon, Targaryen\} \end{aligned}$$

   ¿Son $Stark$, $Lannister$ y $Casas$ mutuamente disjuntos?
   ¿Son $Lannister$, $Baratheon$ y $Targaryen$ mutuamente disjuntos?
   ¿Cuál es la cardinalidad de $Casas$?
   ¿Cuál es el conjunto potencia de $Targaryen$?
   Escriba el conjunto $Fanfic$, definido como $Baratheon \times Targaryen$.

2. La función de distancia de Hamming cumple una función muy importante en la detección de errores de transmisión de información. Sirve para calcular la "distancia" o diferencia entre dos secuencias de bits de igual longitud. La función de distancia de Hamming ($H(s,t) = n$) acepta a la entrada dos secuencias (s y t) de 0s y 1s de igual longitud, y produce a la salida un número (n) que indica cuántas posiciones difieren en las dos secuencias de entrada. Por ejemplo:

   - $H(11111, 00000) = 5$
   - $H(11001, 00000) = 3$
   - $H(01101, 01001) = 1$

   ¿Cuáles son el dominio y el codominio de la función de Hamming?
   ¿Es esta función inyectiva y/o sobreyectiva?
   ¿Puede existir la función inversa a la función distancia de Hamming? De ser así, defina dicha función inversa.

3. Indique si la relación $a\,C\,b$, definida como "las personas a y b cumplen años el mismo día" es una relación de equivalencia, razonando por qué. En caso de que la respuesta a la pregunta anterior sea afirmativa,

APELLIDOS:	NOMBRE:	DNI:	CALIFICACIÓN:
ASIGNATURA: Fundamentos Matemáticos de Ing. Biomédica 3	FECHA: 03/04/14	GRUPO:	

2. El dominio de la función de Hamming es (B, B), siendo B una secuencia de bits (cuyos posibles valores son los del conjunto $b = \{0, 1\}$) de tamaño $n \in \mathbb{N}$. El codominio es $\mathbb{N}$
La función no es inyectiva, ya que hay más de un elemento en el dominio que lleva al mismo elemento en el codominio. Sin embargo, sí que es sobreyectiva, ya que pueden cubrirse todos los valores del codominio. No existe una función inversa a la distancia de Hamming, ya que al no ser una función inyectiva tampoco es biyectiva.

3. Es una relación de equivalencia, ya que cumple las propiedades:

   - **Reflexiva:** a cumple años el mismo día que a.
   - **Simétrica:** Si a cumple años el mismo día que b, entonces b cumple años el mismo día que a.
   - **Transitiva:** Si a cumple años el mismo día que b, y b cumple años el mismo día que c, entonces a cumple años el mismo día que c.

   La relación tiene 365 clases de equivalencia, una para cada día del año. O, si se quieren considerar los años bisiestos, 366 clases de equivalencia.

APELLIDOS:	NOMBRE:	DNI:	CALIFICACIÓN:
ASIGNATURA: Fundamentos Matemáticos de Ing. Biomédica 3	FECHA: 03/04/14	GRUPO:	

Problema 3: *1.5 puntos*

Demuestre que, para todo entero positivo n:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Solución

Demostramos usando inducción considerando como $P(n)$ la igualdad del enunciado.
Caso base: Demostramos $P(1)$:

$$\sum_{i=1}^{1} i \cdot i! = 1 \cdot 1! = 1$$
$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$\sum_{i=1}^{1} i \cdot i! = (1+1)! - 1$$

Paso inductivo: Asumimos que $P(n)$ es cierto. Demostramos que $P(n) \implies P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 \\ &= (n+1)!(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que $P(n)$ es cierto $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Problema 4: *2.5 puntos*

En la terrible ciudad de Carcosa, donde se ponen los soles gemelos y las estrellas negras brillan en el cielo, gobierna un Rey Envuelto en Harapos. Este gobernante, cuyo verdadero nombre no debe ser pronunciado, se divierte ofreciendo a sus esclavos la libertad si éstos consiguen vencerle en un curioso juego.

Al principio de este juego ambos jugadores (el Rey y su esclavo) comparten un número finito (al que llamaremos p) de piedras. Estas piedras están o bien marcadas con el Símbolo Arcano, o bien con el Símbolo Amarillo. No reproduciremos aquí el aspecto de estos símbolos para no atraer la ira de los Primigenios, pero podemos asegurar que tenemos arc piedras con el Símbolo Arcano y ama piedras con el Símbolo Amarillo, cumpliéndose que $p = arc + ama$

El juego se desarrolla por turnos y, en cada uno de ellos, un jugador puede cambiar dos piedras por otra, siguiendo las siguientes reglas:

- Dos piedras con el mismo símbolo pueden cambiarse por una piedra con el Símbolo Amarillo.
- Dos piedras con símbolos diferentes pueden cambiarse por una piedra con el Símbolo Arcano.

El juego termina cuando sólo queda una piedra, siendo el ganador el Rey Envuelto en Harapos si la piedra que queda tiene el Símbolo Amarillo, y ganando el esclavo si la piedra que queda tiene el Símbolo Arcano.

Sabiendo esto:

1. Represente el juego descrito mediante una máquina de estados.
2. Demuestre utilizando inducción que el juego termina.
3. Demuestre utilizando inducción que, empiece quién empiece a jugar, el esclavo sólo puede ganar si el número inicial de piedras con el Símbolo Arcano (arc) es impar.

Solución

1. Podemos representar el juego como una máquina de estados con dos variables (a, b), siendo a el número actual de piedras con el Símbolo Arcano, y b el número actual de piedras con el Símbolo Amarillo. Esta máquina de estados cuenta con las siguientes transiciones. Para describirlas consideramos que el estado actual es (x, y).

   - Cambiar dos piedras con el Símbolo Amarillo por una piedra con el Símbolo Amarillo: $(x', y') = (x, y - 1)$
   - Cambiar dos piedras con el Símbolo Arcano por una piedra con el Símbolo Amarillo: $(x', y') = (x - 2, y + 1)$

Caso base: $P(0)$ es cierto, ya que tras 0 turnos el número de piedras en juego es $p - 0 = p$, el inicial.

Paso inductivo: Asumimos que $P(n)$ es cierto y demostramos que $P(n) \implies P(n+1)$. Como asumimos que $P(n)$ es cierto, sabemos que tras n turnos tenemos $p - n$ piedras. En las tres posibles transiciones que podemos llevar a cabo para pasar del turno n al turno $n+1$, el número de piedras se reduce en 1, por lo que el número de piedras que tendremos tras jugar $n + 1$ turnos es $p - n - 1 = p - (n + 1)$. $\square$

3. Para demostrar que el esclavo sólo puede ganar si el número inicial de piedras con el Símbolo Arcano (arc) es impar, nos ponemos en el caso contrario: buscamos un invariante que cumplan todos los estados alcanzables a partir de un arc par que no cumpla el estado que indica la victoria del esclavo: $(1, 0)$ Por tanto, si encontramos este invariante demostraremos que $(1, 0)$ es inalcanzable desde un estado inicial con arc par.

   Nos fijamos en que el estado deseado tiene un número impar (1) de piedras con el Símbolo Arcano, mientras que el arc inicial es par, así que proponemos como invariante:

   Teorema: *En todo estado alcanzable a partir de uno inicial en el que el número de piedras con el Símbolo Arcano es par, el número de piedras con el Símbolo Arcano también será par.*

   Demostramos este invariante por inducción. Definimos nuestro $P(n)$:

   Para $0 \leq n \leq p - 1$, y un arc par, tras n turnos,
   el número total de piedras con el Símbolo Arcano en juego es par.

   Caso base: $P(0)$ es cierto, ya que tras 0 turnos el número de piedras con el Símbolo Arcano en juego es arc, que es par.

   Paso inductivo: Asumimos que $P(n)$ es cierto y demostramos que $P(n) \implies P(n+1)$. Como asumimos que $P(n)$ es cierto, sabemos que tras n turnos tenemos un numero x par de piedras con el Símbolo Arcano. Estudiamos las tres posibles transiciones que podemos llevar a cabo para pasar del turno n al turno $n+1$:

   - Cambiar dos piedras con el Símbolo Amarillo por una piedra con el Símbolo Amarillo: $(x', y') = (x, y - 1)$
   - Cambiar dos piedras con el Símbolo Arcano por una piedra con el Símbolo Amarillo: $(x', y') = (x - 2, y + 1)$
   - Cambiar una piedra con el Símbolo Arcano y una piedra con el Símbolo Amarillo por una piedra con el Símbolo Arcano: $(x', y') = (x, y - 1)$

APELLIDOS:	NOMBRE:	DNI:	CALIFICACIÓN:
ASIGNATURA: Fundamentos Matemáticos de Ing. Biomédica 3	FECHA: 03/04/14	GRUPO:	

Problema 5: *1.5 puntos*

Considere la siguiente ecuación:

$$113x = 1 - 11y.$$

Utilizando el algoritmo del Pulverizador, encuentre la pareja de valores x e y solución de la ecuación con la y positiva más pequeña posible. La variable x puede ser negativa. Tanto x como y deben ser enteros.

Solución

Podemos escribir $113x = 1-11y$ como $113x+11y = 1$, dándonos así cuenta de que x e y son una combinación lineal de 1. Planteamos el Pulverizador con $a = 113$ y $b = 11$:

a	b	res	$= a - q \cdot b$
113	11	3	$= 113 - 10 \cdot 11$
11	3	2	$= 11 - 3 \cdot 3 = 11 - 3(113 - 10 \cdot 11) = -3 \cdot 113 + 31 \cdot 11$
3	2	1	$= 3 - 1 \cdot 2 = (113 - 10 \cdot 11) - (-3 \cdot 113 + 31 \cdot 11) = 4 \cdot 113 - 41 \cdot 11$

Por tanto, tenemos que $x = 4$ e $y = -41$. Como queremos que $y \geq 1$, hacemos la siguiente operación:

$$1 = 4 \cdot 113 - 41 \cdot 11 = 4 \cdot 113 - 41 \cdot 11 + 113 \cdot 11 - 11 \cdot 113 = -7 \cdot 113 + 72 \cdot 11$$

Asi que la pareja buscada es $x = -7$ e $y = 72$.

Problema 6: *1.5 puntos*

Encuentre el inverso multiplicativo de 17 más pequeño en módulo 72.

Solución

Como el $mcd(17, 72) = 1$, sabemos que 17 y 72 son primos relativos, por lo que podemos aplicar el Teorema de Euler para hallar el inversio multiplicativo. En primer lugar calculamos la función indicatriz de Euler de 72:

$$\phi(72) = \phi(2^3 \cdot 3^2) = 72\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 72\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 24$$

Por tanto, como $17^{\phi(72)} \equiv 1 \pmod{72}$, sabemos que el inverso multiplicativo de 17 en módulo 72 es:

$$17^{\phi(72)-1} = 17^{23}$$

Para encontrar el inverso multiplicativo más pequeño, calculamos el residuo módulo 72 de 17^{23}. Descomponemos 17^{23} en potencias de 2 y operamos:

$$\begin{aligned}
17^{23} &= 17^{16} \cdot 17^4 \cdot 17^2 \cdot 17 \\
17^2 &= 289 \equiv 1 \pmod{72} \\
17^4 &= (17^2)^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod{72} \\
17^8 &= (17^4)^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod{72} \\
17^{16} &= (17^8)^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod{72} \\
17^{23} &\equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 17 = 17 \pmod{72}
\end{aligned}$$

Por tanto, el inverso multiplicativo de 17 módulo 72 es el propio 17.