Estadística para Sistemas Audiovisuales
Curso 2014-2015
Prueba escrita final

9 de mayo de 2015

1. Se considera una urna con 3 bolas azules, 2 bolas blancas y 1 bola roja. Se realiza el experimento que consiste en extraer al azar 3 bolas sin reemplazamiento, y se consideran las variables aleatorias número X de bolas azules y número Y de bolas blancas que se obtienen en la extracción.

   a) (**0.5 puntos**) Calcula la pmf conjunta del vector aleatorio (X, Y).

   b) (**1 punto**) Calcula y representa gráficamente la cdf marginal de Y.

   c) (**1 punto**) Calcula la varianza de Y.

   d) (**0.75 puntos**) Calcula la covarianza entre X e Y.

   e) (**0.25 puntos**) Calcula $P(X = 1|Y > 0)$.

   f) (**0.5 puntos**) ¿Son X e Y independientes? ¿Son X e Y incorreladas? Justifica las respuestas.

2. El tiempo T de reparación de un microscopio de alta precisión sigue una distribución exponencial con media 22 minutos. Se sabe además que el coste de reparación C, en miles de euros, se puede calcular a partir del tiempo de reparación usando la expresión

$$C = \frac{1}{2} \cdot e^{-T} + \frac{1}{2}$$

   a) (**0.25 puntos**) Calcula la probabilidad de que el tiempo de reparación sea menor de diez minutos.

   b) (**0.75 punto**) Calcula el coste medio de reparación.

   c) (**0.5 punto**) Si denotamos por t^* al tiempo en minutos que asignamos a una reparación concreta y sabemos que la probabilidad de que del tiempo de reparación sea mayor que t^* es 0.1, ¿cúanto vale t^*?

3. Se sabe que en una empresa de hardware uno de cada diez dispositivos fabricados es defectuoso. El tiempo de duración en meses de un dispositivo es una variable gamma de parámetros $\alpha = 1$ y $\lambda = 1/2$ para lo dispositivos defectuosos, y de parámetros $\alpha = 1$ y $\lambda = 1/10$ para los no defectuosos.

   a) (**1 punto**) Calcula la probabilidad de que un dispositivo elegido al azar dure menos de seis meses.

   b) (**0.5 puntos**) Si un dispositivo elegido al azar ha fallado antes de los seis meses, calcula la probabilidad de que no sea defectuoso.

4. Sea $Z(t) = Vt^2 + W, t \geq 0$ un proceso estocástico donde V y W son variables aleatorias independientes. V es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en el intervalo $[0, 2]$ mientras que W es una variable aleatoria discreta que toma los valores 1 y 2 con probabilidades 0.2 y 0.8, respectivamente.

   a) (**0.25 puntos**) A partir de dos valores de las variables aleatorias V y W calcula y dibuja la correspondiente realización del proceso $Z(t)$.

   b) (**0.25 puntos**) Calcula $E[V], E[W], E[V^2], E[W^2]$.

   c) (**0.5 puntos**) Calcula la media del proceso estocástico $Z(t)$.

   d) (**1 punto**) Calcula la autocorrelación y la autocovarianza del proceso estocástico $Z(t)$.

   e) (**0.25 puntos**)¿Es $Z(t)$ un proceso estocástico estacionario? ¿Es estacionario en sentido amplio? Motiva las respuestas.

   f) (**0.75 puntos**) Calcula la probabilidad de que el proceso $Z(t)$ en $t = 2$ tome un valor mayor que 3 sabiendo que en $t = 0$ ha tomado el valor 1.

Nota:

Expresión de la pdf de una variable aleatoria gamma X de parámetros α y λ, y propiedades de la función gamma Γ

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ para } z > 0$$

$$\Gamma(m+1) = m!, \text{ para un entero no negativo } m$$