2º Grado de Matemáticas-Ing. Informática

Examen Final

17 de enero del 2019

Apellidos: ______ Nombre: ______

DNI: ______ **Grupo:** ______

1	2	3	4	5	6	7	8

DURACIÓN: 3horas.
Nota: Separa con claridad un problema de otro, y recuadra el resultado cuando este sea una cantidad.

Problema 1.(1,25 puntos)
i) Indica cuántos subgrupos de orden 3 hay en $\mathbb{Z}/999\mathbb{Z}$.

Si d y n son enteros positivos y d divide a n, entonces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tiene un único subgrupo de orden d. Por tanto la respuesta es 1.

ii) Indica cuántos subgrupos de orden 3 hay en $\mathbb{S}_4$.

En $\mathbb{S}_4$ has 8 ciclos de orden 3, y se deduce que hay 4 subgrupos de orden 3.

Problema 2.(1,25 puntos) Sea $G = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
i) Indica cuántos subgrupos de orden 5 hay en G.

En $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ hay un único subgrupo de orden 5, en $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ hay un único subgrupo de orden 5, y en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ no hay un subgrupo de orden 5. Esto muestra que hay $5 \cdot 5 - 1 = 24$ elementos de orden 5 en G.

Finalmente cada grupo de orden 5 usa 4 elementos de orden 5, luego hay 6 grupos de orden 5.

ii) Expresa al grupo cociente $G/5G$ como producto de p-grupos cíclicos, donde $5G$ denota la imagen del homomorfismo de grupos $\phi : G \to G$, $\phi(a, b, c) = (5a, 5b, 5c)$.

$$G/5G = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/5(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})/5(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})/5(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times 0.$$

Problema 3.(1,25 puntos) Sea H el subgrupo de $\mathbb{S}_4$ generado por (124).
i) Halla el orden del subgrupo $N(H)$ (normalizador de H en $\mathbb{S}_4$).

a) $\mathbb{S}_4$ tiene $2^3 3$ elementos por tanto H es de Sylow y todo grupo de orden 3 es conjugado de H.

b) En $\mathbb{S}_4$ hay 8 ciclos de orden 3, luego hay 4 subgrupos de orden 3.

De a) y b) resulta que el normalizador $N(H)$ tiene 6 elementos.

ii) Halla dos elementos que generen $N(H)$. Claramente $(124) \in N(H)$ y se observa que $(24)(124)(24)^{-1} = (142) = (124)^2$ con lo cual $(24) \in N(H)$. Por tanto $N(H)$ está generado por dichos elementos.

Problema 4.(1,25 puntos) Sea G un grupo de orden 45.
i) Demuestra que G es abeliano. Justifica cada paso.

A) $45 = 3^2 5$ y aplicando los teoremas de Sylow vemos que hay un único grupo P_3 de orden 3^2 y un único grupo P_5 de orden 5.

B) Como P_3 y P_5 son normales y se intersecan en el subgrupo trivial se demuestra que la función $P_3 \times P_5 \to G$ es un homomorfismo de grupos y una biyección (un isomorfismo de grupos).

C) Si p es primo, sabemos que los grupos de orden p y de orden p^2 son abelianos, luego $P_3 \times P_5$ es abeliano y aplicando B) sabemos que G es abeliano.

ii) Halla sus posibles expresiones como producto de p-grupos cíclicos.

$G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Problema 5.(1,25 puntos)

Indica cuántos homomorfismos de grupos se pueden definir de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ en $\mathbb{S}_3$.

En $\mathbb{S}_3$ hay cuatro elementos con orden 1 y 2, los dos restantes tienen orden 3. Luego hay 4 homomorfismos de grupos.

Problema 6.(1,25 puntos)

i) Decide si hay un homomorfismo sobreyectivo del grupos de Q_8 (grupo cuaternio) en $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

ii) Decide si hay un homomorfismo sobreyectivo del grupos de D_4 (grupo diedral de orden 8) en $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Ya hemos visto que si p es primo y G es un grupo no abeliano de orden p^3, entonces $Z(G)$ (el centro) tiene orden p y $G/Z(G) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En ambos ejemplos $p = 2$ y el <u>único normal</u> de orden 2 es $Z(G)$, luego $G/Z(G) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que no es cíclico.

Luego no existe un subgrupo normal de orden 2 con cociente $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ en ninguno de los dos casos.

Problema 7.(1,25 puntos) Sea k el cuerpo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Halla un polinomio mónico $F(X) \in k[X]$ de modo que el anillo cociente $k[X]/\langle F(X)\rangle$ sea un cuerpo con 9 elementos. Justifica cada paso.

Sea, por ejemplo, $F(X) = X^2 + X - 1$ (hay otros). Como el grado es 2 el anillo $k[X]/\langle F(X)\rangle$ tiene 9 elementos.

Observo que $F(X)$ no tiene ceros en el cuerpo, por tanto es irreducible por tener grado 2 y esto implica que el anillo cociente $k[X]/\langle F(X)\rangle$ es un cuerpo.

Problema 8.(1,25 puntos) Si $(A, +, .)$ es un anillo denotamos por $U(A)$ al grupo de unidades de A.

i) Sean B y C son dos anillos, y sea $A = B \times C$ el anillo producto. Demuestra que $U(A) = U(B) \times U(C)$.

$(b, c) \in U(A)$ sii existe (b', c') tal que $(bb', cc') = (1, 1)$ sii $b \in U(B)$ y $c \in U(C)$.

ii) Expresa el grupo de unidades del anillo $Z[i] \times Z$ como producto de p-grupos cíclicos.

Observamos primero que $U(Z[i]) = \{1, i, -1, -i\}$, y esto se justifica, por ejemplo, usando la norma $N(a + bi) = a^2 + b^2$, que es una función de con valores en $\mathbb{Z} \geq 0$ compatible con el producto. Se deduce que las unidades coinciden con los elementos con norma 1.

Dado que $U(Z[i]) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, aplicando la primera i) se tiene

$$U(Z[i] \times Z) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$