Apellidos: Iniciales 1^{er} apellido:

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

14/1/2019

Examen final

Instrucciones:

- En cada pregunta de test sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto; y de los ejercicios: sobre 3 puntos.
- Tiempo total del examen: **4 horas** (Dos horas cada parte y partes separadas por un descanso).
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico a lo largo de todo el examen.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en Moodle.
- **Justificar todas las respuestas en los 10 ejercicios y los 4 problemas.**

TEST (20%)

La estructura deductiva $p \vee q \to t \vee r,\ p \wedge r \implies t$ verifica que:

a) Es correcta.

b) Es incorrecta y un contraejemplo es $V(p) = 0$, $V(q) = V(r) = 1$ y $V(t) = 0$.

c) Es incorrecta y un contraejemplo es $V(p) = V(q) = V(r) = 1$ y $V(t) = 0$.

C

La fórmula $\neg\forall x P(x) \vee Q(x)$ verifica que:

a) Es abierta y tiene como conectivo principal $\neg$.

b) Es abierta y tiene como conectivo principal $\vee$.

c) Es cerrada y tiene como conectivo principal $\vee$.

B

El conjunto de fórmulas $\{p \to q,\ q \to r,\ \neg(p \vee r)\}$ verifica que:

a) Es satisfactible y $V(p) = V(q) = V(r) = 0$ es un modelo.

b) Es satisfactible y $V(p) = V(q) = V(r) = 1$ es un modelo.

c) Es insatisfactible.

A

Dada la función recursiva $f : LIST_P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ tal que

$\{ 0 \quad$ si $L = [\,]$

La siguiente definición incompleta de una función recursiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ verifica que:

$$f(n) = \begin{cases} \dots & \text{si } \dots \\ 1 + f(n-2) & \text{si } n \text{ es par y } n \geq 2 \\ f(n-1) & \text{si } n \text{ es impar y } n \geq a \end{cases}$$

a) No se puede completar.

b) Se puede completar si $a = 3$, añadiendo una regla básica que determine el valor de $f(1)$.

c) Se puede completar si $a = 1$, añadiendo una regla básica que determine el valor de $f(0)$.

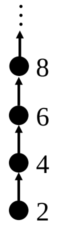
C

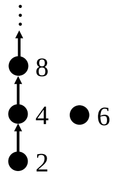
En un concurso de cine participan 4 películas españolas, 5 francesas y 3 italianas. ¿Cuántas clasificaciones distintas pueden darse atendiendo solo a la nacionalidad de las películas?

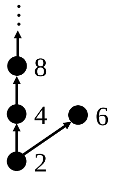
a) $\dfrac{12!}{4! \cdot 5! \cdot 3!}$ b) $4! \cdot 5! \cdot 3!$ c) $12!$

A

El diagrama de Hasse del conjunto $\{ 2^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ 6 \}$ con de la relación de divisibilidad es:

a) 

b) 

c) 

C

El conjunto $\mathbb{Z}_7$ es igual a:

a) $\{ \overline{-3}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{38} \}$

b) $\{ \overline{-3}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{45} \}$

c) $\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{-3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6} \}$

B

Sea G un bosque con 20 vértices y 12 aristas. Entonces se verifica:

a) G puede tener más de 8 componentes conexas.

b) G tiene exactamente 8 componentes conexas.

c) G puede tener menos de 8 componentes conexas.

B

DEFINICIONES (10%)

1. Definir fórmula contingente.

Una fórmula es contingente si tiene modelos y tiene también no modelos.

2. Definir regla recursiva de una función recursiva $f : A \to B$.

En una defición recursiva de $f : A \to B$, una regla es recursiva si para evaluar el valor de f en un elemento del dominio A utiliza el valor de la propia función f en al menos otro elemento de A.

3. Obtener el desarrollo de $(a+b)^n$ usando el binomio de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

4. Enunciar la propiedad antisimétrica de una relación R sobre un conjunto A.

La relación R sobre el conjunto A es antisimétrica si para todo $a, b \in A$ tales que $a\,R\,b$ y $b\,R\,a$ se verifica que $a = b$.

5. Enunciar la fórmula de Euler para grafos simples.

EJERCICIOS (30%)

1. Se consideran las fórmulas $F = \neg(p \vee (q \vee p) \leftrightarrow \neg p)$ y $G = p \wedge \neg p \to p$.

a) Usar equivalencias elementales para simplificar F y G.

b) Usar las simplificaciones obtenidas en a) para decidir si $F \equiv G$.

a) Simplificamos las fórmulas:

$$G \equiv_1 \bot \to p \equiv_2 \neg\bot \vee p \equiv_3 \top \vee p \equiv_4 \top$$

donde: (1): $A \wedge \neg A \equiv \bot$, (2): $A \to B \equiv \neg A \vee B$, (3): $\neg\bot \equiv \top$, (4): $\top \vee A \equiv \top$

$$\begin{aligned} F &\equiv_5 \neg((p \vee p) \vee q \leftrightarrow \neg p) \equiv_6 \neg(p \vee q \leftrightarrow \neg p) \equiv_7 \neg(((p \vee q) \wedge \neg p) \vee (\neg(p \vee q) \wedge p)) \\ &\equiv_8 \neg(((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \wedge p)) \equiv_9 \neg((\bot \vee (q \wedge \neg p)) \vee (\neg q \wedge (\neg p \wedge p)) \\ &\equiv_{10} \neg((q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \bot)) \equiv_{11} \neg((q \wedge \neg p) \vee \bot) \equiv_{12} \neg(q \wedge \neg p) \equiv_{13} p \vee \neg q \end{aligned}$$

donde: (5): conmutativa-asociativa, (6): $A \vee A \equiv A$, (7): $A \leftrightarrow \neg B \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$, (8): distributiva y ley de Morgan, (9): $A \wedge \neg A \equiv \bot$ y conmutativa-asociativa, (10): $\bot \vee A \equiv A$ y $\neg A \wedge A \equiv \bot$, (11): $A \wedge \bot \equiv \bot$, (12): $A \vee \bot \equiv A$, (13): ley de Morgan

b) De los resultados obtenidos en a) se concluye que $F \not\equiv G$ pues $p \vee \neg q \not\equiv \top$.

2. Usar el dominio $D = \{\text{reptiles}\}$ para formalizar el siguiente razonamiento en lógica de predicados:
$P_1 =$ Los camaleones se mimetizan.
$P_2 =$ Hay reptiles que son divertidos, pero no el lagarto Juancho.
$Q =$ Entonces, hay reptiles divertidos que comen insectos.

Sobre el dominio $\{\text{reptiles}\}$ definimos los siguientes predicados:

1. $C(x) = x$ es un camaleón
2. $M(x) = x$ se mimetiza
3. $D(x) = x$ es divertido
4. $I(x) = x$ come insectos

Y consideramos la siguiente constante: $a =$ lagarto Juancho

Entonces la formalización del razonamiento queda del siguiente modo:

$P_1 = \forall x(C(x) \to M(x))$

3. Utilizar el método del tableau para probar que la fórmula F no es una tautología. Construir una interpretación sobre el dominio $D = \{d_1, d_2\}$ que lo pruebe.

$$F = \forall x(\forall y P(y) \to Q(x) \vee \forall y S(y))$$

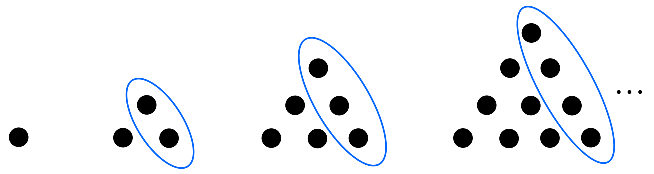
Hacemos el tableau de $\neg F$ para encontrar un no modelo de F:

$$\begin{array}{cl}
\neg\forall x(\forall y P(y) \to Q(x) \vee \forall y S(y)) & (1) \\
| & \\
\exists x\neg(\forall y P(y) \to Q(x) \vee \forall y S(y)) & (2,\ \text{instanciamos } \exists \text{ y se coloca en } 3) \\
| & \\
\neg(\forall y P(y) \to Q(a) \vee \forall y S(y)) & (3) \\
| & \\
\forall y P(y) & \\
| & \\
\neg(Q(a) \vee \forall y S(y)) & (4) \\
| & \\
\neg Q(a) & \\
| & \\
\neg\forall y S(y) & (5) \\
| & \\
\exists y\neg S(y) & (6,\ \text{instanciamos } \exists \text{ y se coloca a continuación}) \\
| & \\
\neg S(b) & \\
| & \\
P(a) & (7,\ \text{instanciamos } \forall y P(y) \text{ en } a) \\
| & \\
P(b) & (8,\ \text{instanciamos } \forall y P(y) \text{ en } b)
\end{array}$$

El tableau es abierto pues tiene una rama abierta, por tanto $\neg F$ tiene modelos (F tiene no modelos). Para obtener una interpretación que sea no modelo de F nos fijamos en la rama abierta del tableau, identificando a con d_1 y b con d_2:

$$P, Q, S : D \to \{0, 1\} \text{ tales que } \begin{array}{ll} P(d_1) = 1 & P(d_2) = 1 \\ Q(d_1) = 0 & Q(d_2) = 0 \text{ ó } 1 \\ S(d_1) = 0 \text{ ó } 1 & S(d_2) = 0 \end{array}$$

4. Se considera la siguiente sucesión de figuras:



1 2 3 4 ...

$f(n-1) + n \quad \text{si } n > 1$

5. Probar por inducción que $f(n) = g(n)\ \forall n \geq 1$, siendo

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 3f(n-1) + 2n - 3 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(n) = 3^n - n$$

Paso base ($n = 1$): $f(1) = 2$ (regla básica) y $g(1) = 3^1 - 1 = 2$, luego $f(1) = g(1)$.

Paso de inducción: Sea $n \geq 1$ tal que $f(n) = g(n)$ (H.I:). Hay que probar que $f(n+1) = g(n+1)$. Como $n + 1 \geq 2$, para evaluar $f(n+1)$ se usa la regla recursiva:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 3f(n) + 2(n+1) - 3 = 3f(n) + 2n - 1 =_{H.I.} 3g(n) + 2n - 1 \\ &= 3(3^n - n) + 2n - 1 = 3^{n+1} - 3n + 2n - 1 = 3^{n+1} - (n+1) = g(n+1) \end{aligned}$$

Por lo tanto queda probado que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$.

6. Se quieren formar números de 3 cifras distintas con los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) ¿Cuántos tienen por lo menos una cifra impar?

b) ¿Cuántos empiezan por una cifra impar o acaban por una cifra par?

a) Se puede resolver usando el principio del complementario.
$X = \{$ números de 3 cifras distintas con los dígitos 1..9 $\}$
$A = \{$ números de X con al menos una cifra impar $\}$
$A^c = \{$ números de X con ninguna cifra impar $\}$
$= \{$ números de X con todas sus cifras pares $\}$

El orden en que se eligen las 3 cifras para formar números es relevante ($234 \neq 342$) y como las cifras deben ser distintas no hay repetición. Por tanto:
$|A^c| = V(4,3) = 4 \cdot 3 \cdot 2$
$|X| = V(9,3) = 9 \cdot 8 \cdot 7$
Luego $|A| = |X| - |A^c| = 9 \cdot 8 \cdot 7 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 504 - 24 = 480$

b) $I = \{$ números de X que empiezan por una cifra impar $\}$
$P = \{$ números de X que acaban por una cifra par $\}$

Lo que se pide es $|I \cup P|$, que se puede obtener usando el principio de inclusión-exclusión (1) y el de multiplicación (2):

$$\begin{aligned} |I \cup P| &=_{(1)} |I| + |P| - |I \cap P| =_{(2)} 5 \cdot V(8,2) + 4 \cdot V(8,2) - 5 \cdot 4 \cdot V(7,1) \\ &= 5 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 7 - 5 \cdot 4 \cdot 7 = 280 + 224 - 140 = 364 \end{aligned}$$

Los pasos que hemos aplicado en el principio de multiplicación son los siguientes:

7. Cuatro amigos van a cenar a una pizzería en la que hay 7 tipos distintos de pizza. Si cada uno de ellos toma exactamente una pizza, ¿cuántos pedidos diferentes pueden hacerse en estas dos situaciones?

a) Uno de los amigos se encarga de pedir en la barra las pizzas de todos.

b) El camarero toma nota y debe recordar qué ha pedido cada uno.

a) Se trata de hacer selecciones de tamaño 4 del conjunto de las 7 pizzas y, en este caso, no importa el orden (el que pide indica únicamente el número de pizzas de cada tipo que tienen que servir en la mesa) y pueden repetirse (varios amigos pueden pedir la misma pizza). Por tanto son combinaciones con repetición:

$$CR(7,4) = PR(10,6,4) = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!}$$

b) En este caso importa el orden (las pizzas están asociadas biyectivamente al conjunto de amigos) y se trata por tanto de variaciones con repetición:

$$VR(7,4) = 7^4$$

8. Sea la siguiente relación de equivalencia sobre el conjunto A de palabras de 4 bits:

$$a_1a_2a_3a_4 \, R \, b_1b_2b_3b_4 \quad \Longleftrightarrow \quad a_2 - a_3 = b_2 - b_3$$

a) Describir todas las clases de equivalencia de R y dar el cardinal de cada una de ellas.

b) Obtener el conjunto cociente A/R y su cardinal.

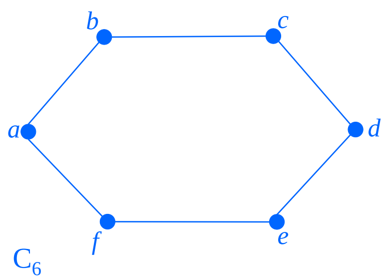
a) Cada una de las clases de equivalencia de R está asociada a un valor de $a_2 - a_3$ y, dado que a_2 y a_3 son bits, hay exactamente tres clases de equivalencia: las asociadas a los valores -1, 0 y 1.
Asociada a -1: $[0010] = \{ 0010, 0011, 1010, 1011 \}$ con cardinal 4.
Asociada a 1: $[0100] = \{ 0100, 0101, 1100, 1101 \}$ con cardinal 4.
Asociada a 0: $[0000] = \{ 0000, 0001, 1000, 1001, 0110, 0111, 1110, 1111 \}$ con cardinal 8.

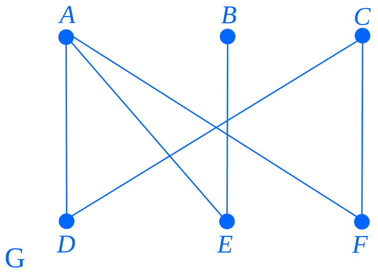
b) A la vista del apartado a) tenemos:

$$A/R = \{ [0010], [0100], [0000] \} \qquad \text{y su cardinal} \qquad |A/R| = 3$$

9. Construir dos grafos bipartitos de 6 vértices y 6 aristas que no sean isomorfos. Probar que los grafos dados cumplen lo que se exige.

La solución a este problema no es única. Una de las posibles sería:

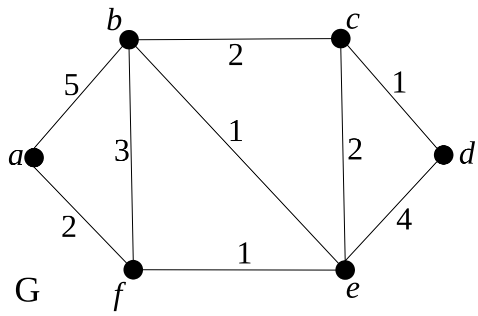




C_6 hemos estudiado que es bipartito. G también lo es porque los vértices se pueden separar en dos conjuntos $V_1 = \{A, B, C\}$ y $V_2 = \{D, E, F\}$ tales que en ninguno de ellos existen dos vértices adyacentes y cumplen $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

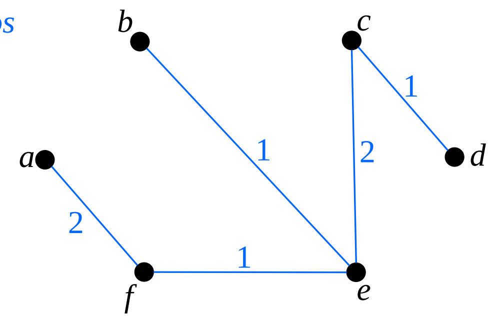
Además, $C_6 \not\approx G$ porque tienen distinta secuencia de grados: $Sec(C_6) = [2, 2, 2, 2, 2, 2]$ y $Sec(G) = [3, 2, 2, 2, 2, 1]$.

10. En el grafo ponderado G de la figura calcular las distancias del vértice a al resto de los vértices y el correspondiente árbol de caminos mínimos, usando el algoritmo de Dijkstra.



Aplicamos el algoritmo de Dijkstra desde el vértice a y, en cada paso, obtenemos la distancia de a a uno de los vértices del grafo y una arista del árbol de caminos mínimos.

	a	b	c	d	e	f	caminos
	-	5	$\propto$	$\propto$	$\propto$	**2**	af
		5	$\propto$	$\propto$	**3**		afe
		4	5	7			afeb
			5	7			afec
				6			afecd
d(a,v)	**0**	**4**	**5**	**6**	**3**	**2**	



El la última fila de la tabla están las distancias de a a cualquier vértice y en la figura de la derecha el árbol de caminos mínimos desde a.

Apellidos: Iniciales 1^{er} apellido:

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

14/1/2019

Examen final

PROBLEMA 1 (12%)

Demostrar, mediante reglas de inferencia, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$p \wedge t \to q \vee r,\ s \vee t \to \neg r,\ (p \to q) \to r,\ u \vee t \ \Rightarrow\ u \vee \neg w$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que se verifica $\neg(u \vee \neg w)$:

$\neg(u \vee \neg w) \ \Rightarrow\ \neg u \wedge \neg\neg w$	(Eq. ley de Morgan)
$\neg u \wedge \neg\neg w \ \Rightarrow\ \neg u$	(Simplificación)
$\neg u,\ u \vee t \ \Rightarrow\ t$	(SD)
$t \ \Rightarrow\ s \vee t$	(Adición)
$s \vee t,\ s \vee t \to \neg r \ \Rightarrow\ \neg r$	(MP)
$\neg r,\ (p \to q) \to r \ \Rightarrow\ \neg(p \to q)$	(MT)
$\neg(p \to q) \ \Rightarrow\ p \wedge \neg q$	(Eq.)
$p \wedge \neg q \ \Rightarrow\ p$	(Simplificación)
$p,\ t \ \Rightarrow\ p \wedge t$	(Combinación)
$p \wedge t,\ p \wedge t \to q \vee r \ \Rightarrow\ q \vee r$	(MP)
$p \wedge \neg q \ \Rightarrow\ \neg q$	(Simplificación)
$\neg q,\ q \vee r \ \Rightarrow\ r$	(SD)
$r,\ \neg r \ \Rightarrow\ r \wedge \neg r$	(Simplificación)
$r \wedge \neg r \ \Rightarrow\ \perp$	(Eq.)

Como se llega a contradicción, queda probado que la estructura deductiva es correcta.

Apellidos: Iniciales 1^{er} apellido:

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

14/1/2019

Examen final

PROBLEMA 2 (12%)

Se considera $f : LIST_P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \to LIST(\mathbb{N})$ definida de manera explícita para listas de longitud mayor o igual que 2 por:

$$f([x_1,\ldots,x_n],m) = \begin{cases} [[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n],x_1+\cdots+x_n+m] & \text{si } n \text{ es par, } n \geq 2 \\ [[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-2},x_{n-1}],x_1+\cdots+x_{n-1}+m] & \text{si } n \text{ es impar, } n \geq 3 \end{cases}$$

a) *(6 puntos)* Dar una definición recursiva de f que incluya listas de cualquier longitud.

b) *(3 puntos)* Evaluar, usando la definición recursiva propuesta, $f([1,3,5,7,9],2)$ y calcular el árbol de dependencia $T_f([1,3,5,7,9],2)$.

c) *(1 punto)* Describir qué devuelve $f(L,0)$ para cualquier lista L, según la definición recursiva propuesta en a).

a)

$$f(L,m) = \begin{cases} [m] & \text{si } LONG(L) \leq 1 \\ [[CAB(L), CAB(RESTO(L))]] \parallel & \\ \quad f(RESTO(RESTO(L)), m + CAB(L) + CAB(RESTO(L))) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} f([1,3,5,7,9],2) &=_{RR} [[1,3]] \parallel f([5,7,9],6) \\ &=_{RR} [[1,3]] \parallel [[5,7]] \parallel f([9],18) \\ &=_{RB} [[1,3]] \parallel [[5,7]] \parallel [18] \\ &= [[1,3]] \parallel [[5,7],18] \\ &= [[1,3],[5,7],18] \end{aligned}$$

$$T_f([1,3,5,7,9],2) = \begin{array}{c} ([1,3,5,7,9],2) \\ | \\ ([5,7,9],6) \\ | \\ ([9],18) \end{array}$$

c) Si $L = [\,]$ o L es una lista con longitud 1, $f(L,0) = [0]$.
Si L es una lista de longitud mayor o igual que 2:

ETSISI
UPM

Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:**
Nombre:

Lógica y Matemática Discreta

14/1/2019

Examen final

PROBLEMA 3 (6%)

Se considera el conjunto $A = \{ x_1x_2x_3x_4 \mid x_1, x_2 \in \{a, b, c, d\} \text{ y } x_3, x_4 \in \{0, 1\} \}$ y la siguiente relación de orden R sobre A

$$x_1x_2x_3x_4 \, R \, y_1y_2y_3y_4 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1x_2 \leq_{LEX} y_1y_2, \; x_3 \leq y_3 \text{ y } x_4 \leq y_4$$

donde $\leq_{LEX}$ representa el orden del diccionario.

a) *(1,5 puntos)* Probar que R es una relación de orden parcial.

b) *(2,5 puntos)* Probar que (A, R) tiene máximo y mínimo.

c) *(6 puntos)* Dado el conjunto $M = \{ ab01, ba10, ba11, cb10, da11, db11 \}$, obtener el diagrama de Hasse de (M, R) y sus elementos notables.

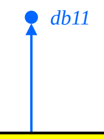
a) R es de orden parcial porque tiene elementos no comparables. Por ejemplo: $aa01 \not R \, aa10$ porque $1 = x_4 \not\leq y_4 = 0$ y $aa10 \not R \, aa01$ porque $1 = x_3 \not\leq y_3 = 0$.

b) En (A, R) se verifica que $aa00$ es el mínimo, porque para todo $y_1y_2y_3y_4 \in A$ se cumple que $aa00 \, R \, y_1y_2y_3y_4$, ya que $aa \leq_{LEX} y_1y_2$ para cualquier y_1y_2, $0 \leq y_3$ para cualquier y_3 y $0 \leq y_4$ para cualquier y_4.
También se verifica que $dd11$ es el máxino, porque para todo $x_1x_2x_3x_4 \in A$ se cumple que $x_1x_2x_3x_4 \, R \, dd11$, ya que $x_1x_2 \leq_{LEX} dd$ para cualquier x_1x_2, $x_3 \leq 1$ para cualquier x_3 y $x_4 \leq 1$ para cualquier x_4.

c) Estudiamos las relaciones que se dan entre los elementos de M:

$ab01$ es más pequeño que $ba11$, $da11$ y $db11$
$ba10$ es más pequeño que $ba11$, $cb10$, $da11$ y $db11$
$ba11$ es más pequeño que $da11$ y $db11$
$cb10$ es más pequeño que $da11$ y $db11$
$da11$ es más pequeño que $db11$

De estas relaciones se obtiene el diagrama de Hasse de la figura



A la vista del diagrama de Hasse, los elemento notables de (M, R) son:

Minimales:	$ab01$ y $ba10$
Mínimo	no hay, por tener más de un minimal
Maximales:	$db11$
Máximo	$db11$, por ser el único maximal en un conjunto finito

Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:**
Nombre:

ETSISI
UPM

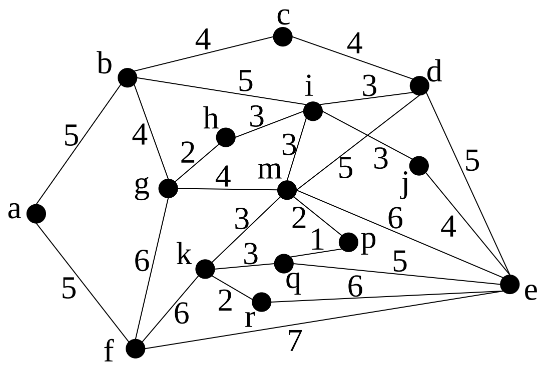
Lógica y Matemática Discreta

14/1/2019

Examen final

PROBLEMA 4 (10%)

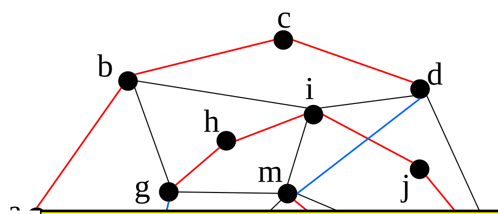
El grafo de la figura representa las poblaciones (vértices) y carreteras (aristas) de una Comarca y los pesos de las aristas indican las distancias en km entre las poblaciones correspondientes a sus vértices extremos.



1. *(1,5 puntos)* El organizador de un rally quiere diseñar un circuito que pase por cada una de las carreteras exactamente una vez, ¿puede hacerlo? En caso afirmativo indicar cómo. En caso negativo indicar si existe un trazado para la carrera en el que la salida y la meta no coincidan (**nota**: si existe no hace falta calcularlo).

   El circuito que se pide en este caso es un circuito euleriano. Como el grafo es conexo, para saber si existe dicho circuito, basta analizar los grados de los vértices. Se tiene que $g(i) = 5$, $g(q) = 3$ y el resto de los vértices tienen grado par. Entonces, el grafo no es euleriano y, por tanto, no existe el circuito que piden. Sin embargo, el grafo es semieuleriano y admite un recorrido con extremos en los vértices i y q, que se corresponde con el trazado de la carrera con salida y meta distintos.

2. *(3,5 puntos)* Si el organizador del rally quisiese diseñar un circuito que pasase por cada una de las poblaciones de la Comarca exactamente una vez, ¿podría hacerlo? En caso afirmativo dar un ejemplo de circuito que empiece en a.

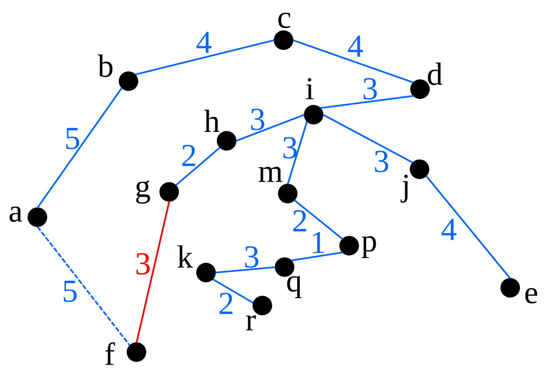


rojo). El subgrafo determinado por estas aristas no tiene ciclos ni vértices de grado mayor que 2, además incluye todos los vértices del grafo. Por tanto, para comprobar si existe el ciclo hamiltoniano basta ver si se pueden añadir aristas que unan todas las cadenas definidas por las aristas rojas en un ciclo. En este caso sí se puede hacer y las aristas añadidas están marcadas en color azul. El ciclo (circuito para la carrera) obtenido es el siguiente:

$$a, b, c, d, m, p, q, k, r, e, j, i, h, g, f, a$$

3. *(5 puntos)* En el presupuesto del próximo año se quiere incluir una partida para ensanchar algunas carreteras de la Comarca, de forma que se pueda ir de cualquier población a cualquier otra usando exclusivamente las nuevas vías.

   (i) Si el coste del ensanche es de 1 millón de euros por km, ¿cuál será el valor mínimo de la partida correspondiente del presupuesto?



La solución óptima se obtiene ensanchando las carreteras correspodientes a un árbol recubridor de peso mínimo. Usando el algoritmo de Kruskal se obtiene el árbol anterior (aristas azules) que tiene peso $w(T) = 44$. Luego el valor de la partida presupuestaria debe ser 44 millones de euros.

   (ii) Resulta que el coste mínimo obtenido en *(i)* excede en 2 millones de euros el presupuesto disponible para esta partida. Entonces, con el objetivo de ajustarse al presupuesto, la empresa adjudicataria ofrece un precio especial de P millones de euros por el ensanche de la carretera *gf*. ¿Cuál será el mayor valor de P con el que se consigue ese objetivo?

Para rebajar el coste del proyecto, ajustando únicamente el peso de la arista gf, hay que incluir esta arista en el árbol recubridor de peso mínimo. Para ello debe tener un peso menor o igual al de la arista de mayor peso del ciclo que se genera al añadirla al árbol anterior, o sea $w(gf) \leq 5$. Como además queremos reducir el peso del árbol en 2 milliones de euros, el peso $w(gf)$ deberá ser de 3 millones de euros (en el árbol se suprimiría una arista de peso 5 en dicho ciclo, por ejemplo af -arista en color azul