

1. Un cubo de lado L de un material de la clase cristalográfica $m\bar{3}$ se somete a compresión hidrostática homogénea en todo su volumen, es decir, el tensor de esfuerzos es un múltiplo del tensor unidad en todos los puntos:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{\delta}}$$

Considerando pequeñas deformaciones, su volumen cuando está comprimido está dado por (s_{ij} son las componentes de la matriz de complianza):

- $L^3 [1 - p(s_{11} + 2s_{12})]$
- $L^3 p(s_{11} + s_{12})$
- $L^3 [1 + p(s_{11} + 2s_{12} + s_{22})]$
- $L^3 [1 - p(s_{11} + s_{22})]$
- $L^3 [1 - 2p(s_{11} + s_{22})]$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.: procediendo igual que en el problema 09_02_02, el producto de la matriz de complianza para la clase dada y el vector de esfuerzos (ambos en notación de Voigt), produce una deformación:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -p(s_{11} + 2s_{12}) \\ -p(s_{11} + 2s_{12}) \\ -p(s_{11} + 2s_{12}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual el nuevo volumen (para pequeñas deformaciones) es:

$$L^3 [1 - p(s_{11} + 2s_{12})]^3 \approx L^3 [1 - 3p(s_{11} + 2s_{12})]$$

2. El ZnTe tiene la estructura cristalina de la blenda de zinc. Calcular su densidad. Los radios iónicos son $r_{Zn} = 0.83 \cdot 10^{-10}$ m, $r_{Te} = 2.11 \cdot 10^{-10}$ m :

- 2234 kg/m³
- 2456 kg/m³²
- 4522 kg/m³
- 4452 kg/m³

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- 243.0kg/kmol UER
- 150.1kg/kmol UER
- 228.3kg/kmol UER
- 57 kg/kmol UER
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

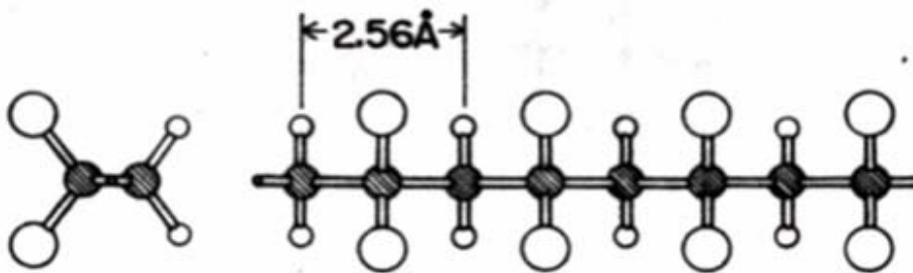
Sol.: ver pag. 203 del texto. Masas atómicas: $Mw_C = 12.01$, $Mw_H = 1.00$, $Mw_O = 16.00$. **La masa molecular de la unidad estructural repetitiva es por tanto:**

$$Mw_{UER} = 8 \cdot Mw_C + 8Mw_H + Mw_O + Mw_C + 2Mw_H + Mw_O$$

$$Mw_{UER} = 150.09 \quad \text{kg/kmol UER}$$

4. El PVDF tiene como unidad estructural repetitiva $-\text{CH}_2-\text{CF}_2-$. En estado sólido las cadenas poliméricas están en conformación *todo-trans*, o estirada, es decir, todos los enlaces C-C en conformación *trans*. En la figura se representan dos vistas de un fragmento de la cadena de PVDF. Los círculos blancos grandes representan átomos de flúor, los blancos pequeños, átomos de hidrógeno, y los oscuros, átomos de carbono.

¿A qué clase pertenece la molécula de PVDF (considerada como infinitamente larga) en esta conformación?



- $2/m$
- 222
- $4mm$
- 2
- m
- ninguna de las anteriores. la respuesta correcta es :

Sol: $mm2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

5. El material (goma) del que se fabrican los neumáticos es un compuesto de caucho sintético SBR, de módulo elástico $E_c = 1.9\text{ GPa}$ y negro de humo (carbono) de módulo elástico $E_n = 32\text{ GPa}$. Se desea que el módulo de la goma sea de $E = 4\text{ GPa}$. Para calcular el módulo elástico de la goma se usa la regla de Voigt-Reuss-Hill: el módulo del compuesto es la media aritmética de los módulos obtenidos con las regla de mezcla de Voigt y con la regla de mezcla de Reuss. Determinar qué fracción volumétrica de caucho sintético debe tener la goma.

- 0.721
- 0.869
- 0.171
- 0.283
- 0.537
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:

Sol.:

Voigt: $E = V_c \cdot E_c + (1 - V_c) \cdot E_n$

Reuss $E^{-1} = V_c \cdot E_c^{-1} + (1 - V_c) \cdot E_n^{-1}$

Voigt-Reuss-Hill: $E = 0.5 \cdot [V_c \cdot E_c + (1 - V_c) \cdot E_n] + 0.5 \cdot \frac{1}{V_c \cdot E_c^{-1} + (1 - V_c) \cdot E_n^{-1}}$

que es una ecuación cuadrática en V_c cuya solución positiva es:

$$\frac{(E_n - E_c) - 2E + \sqrt{E_n^2 - 4 \cdot E \cdot E_n + 6 \cdot E_c \cdot E_n + 4 \cdot E^2 - 4 \cdot E \cdot E_c + E_c^2}}{2(E_n - E_c)} = 0.869$$

6. Un elastómero es un material elástico no lineal para el que la relación entre el esfuerzo de tracción τ y la elongación relativa λ está dada por:

$$\tau(\lambda) = E \cdot \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

donde la elongación relativa λ es la relación entre la longitud deformada y la longitud sin deformar. Para una pieza dada de cierto elastómero, una carga produce una elongación relativa de $\lambda_1 = 1.12$ ¿Cuál será la elongación relativa de la misma pieza y del mismo material para una carga doble?

- 1.42

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sol.: para la primera carga se cumple: $\tau_1 = E \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right)$

Para una carga doble: $\tau_2 = E \left(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^2} \right) = 2\tau_1 = 2E \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \Rightarrow \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^2} = 2 \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right)$

Es decir: $\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^2} = 2 \cdot \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \quad 2 \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) = 0.646$

De donde se obtiene

De esta ecuación resultante se obtiene, p.ej. por el método de Newton-Raphson,:

$$f(\lambda) = \lambda - \frac{1}{\lambda^2} - 2 \cdot \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \quad f_{\text{prima}}(\lambda) = 1 + \frac{2}{\lambda^3}$$

y partiendo de una aproximación inicial:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 &= \lambda_0 - \frac{f(\lambda_0)}{f_{\text{prima}}(\lambda_0)} \quad \lambda_1 = 1.215 \\ \lambda_2 &= \lambda_1 - \frac{f(\lambda_1)}{f_{\text{prima}}(\lambda_1)} \quad \lambda_2 = 1.266 \\ \lambda_3 &= \lambda_2 - \frac{f(\lambda_2)}{f_{\text{prima}}(\lambda_2)} \quad \lambda_3 = 1.268 \end{aligned}$$

Y tomamos este último valor como correcto con tres cifras significativas:

$$\lambda = \lambda_3 \quad \lambda = 1.27$$

7. Un nylon 6,6 tiene una masa molecular media de $M_w = 15500 \text{ kg/kmol}$. Calcular el grado de polimerización promedio.

- 12
- 129
- 365
- 69

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Y por tanto el grado de polimerización promedio es:

$$\frac{M_w}{M_{w_{UER}}} = 69$$

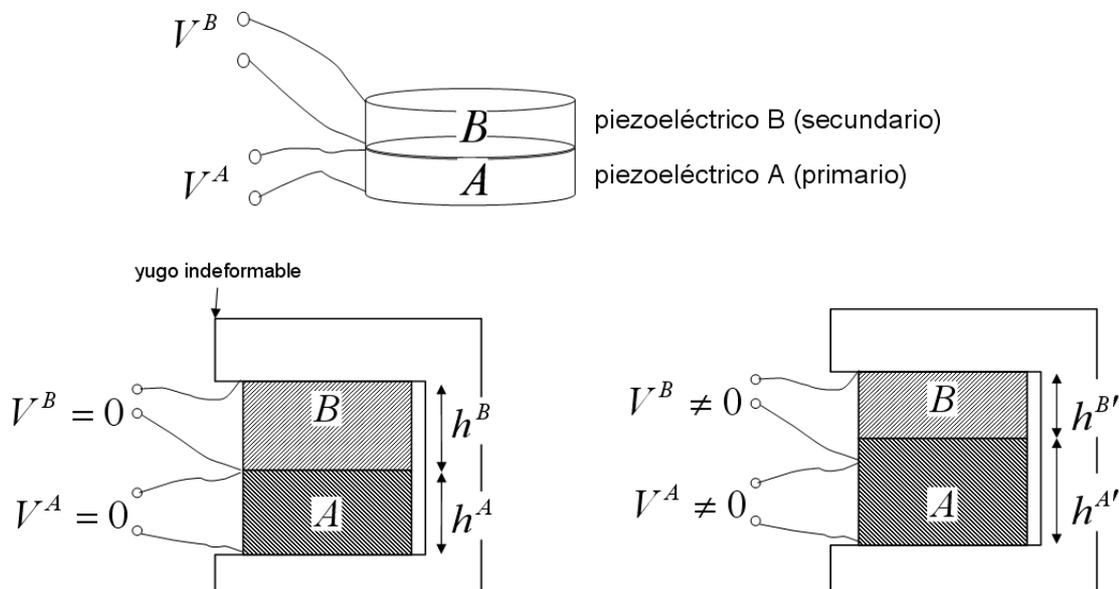
8. Determinar los índices de Miller de un plano que contiene los siguientes tres puntos (1, 1/2, 1); (1/2, 0, 3/4) y (1, 0, 1/2) de una celda cúbica.

- (12 $\bar{1}$)
- (22 $\bar{1}$)
- (122)
- (13 $\bar{1}$)
- ($\bar{1}$ 2 $\bar{1}$)
- ninguna de las anteriores. la respuesta correcta es :

Sol: ver problema 3.54, pág. 72 del texto. Solución disponible en Aulaweb: ($\bar{1}$ 2 $\bar{2}$)

Problema 1

Una aplicación reciente de los materiales cerámicos piezoeléctricos es la construcción de transformadores eléctricos muy ligeros, y que no necesitan componentes magnéticos ni bobinados. El principio de funcionamiento está ilustrado en la figura. Dos discos de materiales piezoeléctricos diferentes, A y B están en contacto mecánico, pero eléctricamente aislados entre sí. El conjunto está colocado en una estructura rígida e indeformable ("yugo") que mantiene constante el espesor conjunto de los dos discos.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

aparece un voltaje transformado V^B , que en general es diferente de V^A .

Para esta aplicación suelen usarse cerámicas PZT policristalinas tanto para el primario como para el secundario. Ambos discos son, desde el punto de vista mecánico, materiales homogéneos e isotrópicos. Como piezoeléctricos, ambos son homogéneos y han sido polarizados perpendicularmente a sus caras circulares.

Todas las propiedades físicas de los materiales (constantes dieléctricas κ , módulos piezoeléctricos d , módulos elásticos E_{Young} , etc), las dimensiones (radios R , espesores h) y la señal de entrada V^A son conocidas.

En primera aproximación considerar que el material del disco B tiene un módulo elástico muy inferior al de A y que por tanto éste se deforma libremente al aplicar V^A (el disco B no opone resistencia a la variación de espesor del disco A; el disco A se deforma como si B no existiera, y el disco B se ve forzado a ocupar el espacio restante en el yugo). Tener en cuenta además que las deformaciones son muy pequeñas.

- ¿a qué clase pertenecen los materiales A y B?
- representar los ejes convencionales para los discos A y B

Calcular en función de las variables (propiedades físicas, geometría, módulos, etc) que consideres necesarias:

- el espesor h^A , del disco A (primario) al aplicar V^A .
- el esfuerzo τ que esta deformación del primario causa en el disco B (secundario)
- V^B (la diferencia de potencial que aparece entre las caras del secundario debido a este esfuerzo) y la relación de transformación, es decir, V^B/V^A .

(3 puntos, 50 minutos)

Solución 1: al ser los PZT policristalinos y polarizados en una dirección, tienen un eje de orden infinito e infinitos planos que contienen al eje de orden infinito. Son de clase

∞m

Para esta clase, el eje convencional 3 es en la dirección de polarización (en este caso perpendicular a las caras circulares) y los ejes convencionales 1 y 2 están contenidos en el plano de la cara circular).

El voltaje aplicado produce un campo eléctrico:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V^A/h^A \end{bmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31}^A & d_{31}^A & d_{33}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15}^A & 0 & 0 \\ d_{31}^A & d_{31}^A & d_{33}^A & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 d_{31}^A & E_3 d_{31}^A & E_3 d_{33}^A & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el espesor del disco A varía en:

$$\Delta h^A = h^A \varepsilon_3^A = h^A E_3 d_{33}^A \quad h^{A'} = h^A (1 + \varepsilon_3^A)$$

y el espesor del disco B disminuye en la misma cantidad:

$$\Delta h^B = -\Delta h^A$$

Esta variación del espesor es el efecto físico esencial para el funcionamiento del transformador. La deformación axial del disco B es:

$$\varepsilon_3^B = \frac{\Delta h^B}{h^B} = -\frac{h^A}{h^B} \varepsilon_3^A = -\frac{h^A E_3 d_{33}^A}{h^B}$$

Esta deformación es consecuencia de un esfuerzo en dirección axial en el disco B, considerado aisladamente, es decir, fuera del yugo, de módulo:

$$|\tau_3^B| = E_{Young}^B \varepsilon_3^B = \frac{h^A}{h^B} E_{Young}^B E_3 d_{33}^A$$

(a partir de aquí el problema es idéntico al 08_06_02). Por el efecto piezoeléctrico directo, este esfuerzo hace aparecer una polarización (momento dipolar / volumen) en B de:

$$P_3^B = d_{33}^B \tau_3^B = d_{33}^B E_{Young}^B \varepsilon_3^B \quad (**)$$

y un dipolo entre las caras paralelas de B cuya componente 3 es:

$$p_3^B = P_3^B \pi (R^B)^2 h^{B'} \approx P_3^B \pi (R^B)^2 h^B \quad (*)$$

que corresponde a una carga eléctrica entre las caras del disco (condensador plano paralelo):

$$Q^B = \frac{p_3^B}{h^{B'}} \approx \frac{p_3^B}{h^B} = C^B V^B = \varepsilon_0 \kappa^B \frac{\pi (R^B)^2}{h^B} V^B$$

donde ε_0 es la permitividad dieléctrica del vacío.

De donde se obtiene la diferencia de potencial entre las caras del disco B y la relación de transformación:

$$\frac{V^B}{V^A} = \frac{E_{Young}^B d_{33}^A d_{33}^B}{\kappa^B \varepsilon_0}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Por tanto
$$\vec{\varepsilon}^B = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^B & \varepsilon_2^B & \varepsilon_3^B & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^A & \varepsilon_1^A & -\frac{h^A}{h^B} \varepsilon_3^A & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta deformación produce en B (usando la matriz de rigidez para el material mecánicamente isótropo B) un esfuerzo o estado de tensión mecánica:

$$\vec{\tau}^B = \begin{bmatrix} c_{11}^B & c_{12}^B & c_{12}^B & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^B & c_{11}^B & c_{12}^B & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^B & c_{12}^B & c_{11}^B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(c_{11}^B - c_{12}^B)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(c_{11}^B - c_{12}^B)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(c_{11}^B - c_{12}^B)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^B \\ \varepsilon_1^B \\ \varepsilon_3^B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{11}^B + c_{12}^B) \varepsilon_1^B + c_{12}^B \varepsilon_3^B \\ (c_{11}^B + c_{12}^B) \varepsilon_1^B + c_{12}^B \varepsilon_3^B \\ 2c_{12}^B \varepsilon_1^B + c_{11}^B \varepsilon_3^B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y por efecto piezoeléctrico directo:
$$\vec{P}^B = \tilde{d}^B \cdot \vec{\tau}^B$$

$$\vec{P}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15}^B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15}^B & 0 & 0 \\ d_{31}^B & d_{31}^B & d_{33}^B & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (c_{11}^B + c_{12}^B) \varepsilon_1^B + c_{12}^B \varepsilon_3^B \\ (c_{11}^B + c_{12}^B) \varepsilon_1^B + c_{12}^B \varepsilon_3^B \\ 2c_{12}^B \varepsilon_1^B + c_{11}^B \varepsilon_3^B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [2d_{31}^B (c_{11}^B + c_{12}^B) + 2d_{33}^B c_{12}^B] \varepsilon_1^B + \\ (2d_{31}^B c_{12}^B + d_{33}^B c_{11}^B) \varepsilon_3^B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y el resto del problema es idéntico, sustituyendo la tercera componente de la polarización en vez de (**) en la expresión (*).

Problema 2

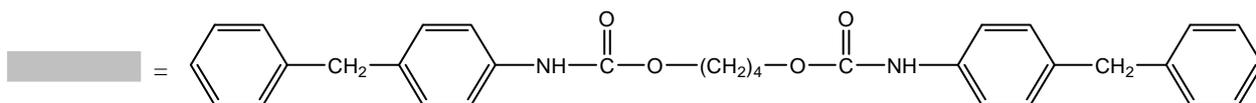
Los poliuretanos son polímeros muy versátiles, que se originan por la reacción entre dioles y diisocianatos. En ocasiones los diisocianatos también se pueden condensar con diaminas originando poliuretanos "mixtos" que



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

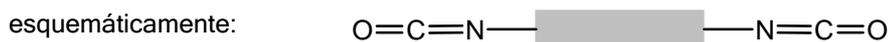
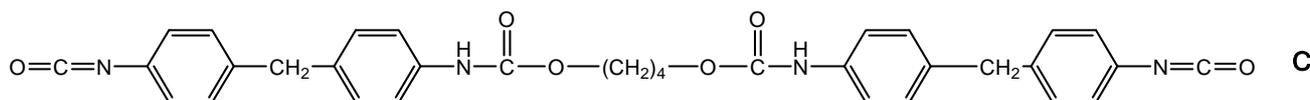
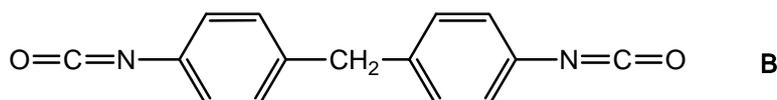
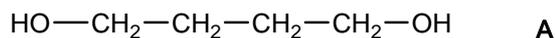
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

donde:



La síntesis de este compuesto se puede llevar a cabo en dos etapas:

- en una primera etapa el 1,4-butanodiol (A) reacciona el bis(4-isocianatofenil)metano (B) para dar el compuesto C
- en una segunda etapa C condensa con la 1,2-etanodiamina (D) para formar P



- Escribe las reacciones químicas correspondientes a cada etapa del proceso.
- Si se utilizan $m_B = 2 \text{ kg}$ de B, ¿qué cantidades de A y D (en kg) serán necesarias? ¿Cuál será la masa de polímero obtenida?
- Si se aplica un esfuerzo de $\tau_1 = 8 \text{ MPa}$ a una muestra de este material a $T = 22^\circ\text{C}$, y después de $t = 3$ días en condiciones de deformación constante el esfuerzo se ha reducido a $\tau_2 = 5 \text{ MPa}$, ¿cuál será su tiempo de relajación?

(3 puntos, 50 minutos)

Solución: $Mw_O = 16.00$, $Mw_H = 1.01$, $Mw_{\text{Carb}} = 12.01$, $Mw_N = 14.0$

$Mw_A = 4Mw_{\text{Carb}} + 2Mw_O + 10Mw_H$ $Mw_A = 90.14$ kg/kmol A

$Mw_B = 15Mw_{\text{Carb}} + 2Mw_N + 10Mw_H + 2Mw_O$ $Mw_B = 250.25$ kg/kmol B

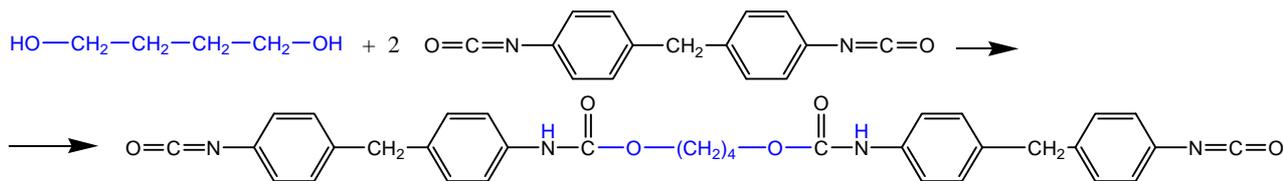
$Mw_C = 34 \cdot Mw_{\text{Carb}} + 6Mw_O + 30Mw_H + 4Mw_N$ $Mw_C = 590.64$ kg/kmol C

$Mw_D = 2Mw_{\text{Carb}} + 2Mw_N + 8Mw_H$ $Mw_D = 60.1$ kg/kmol D

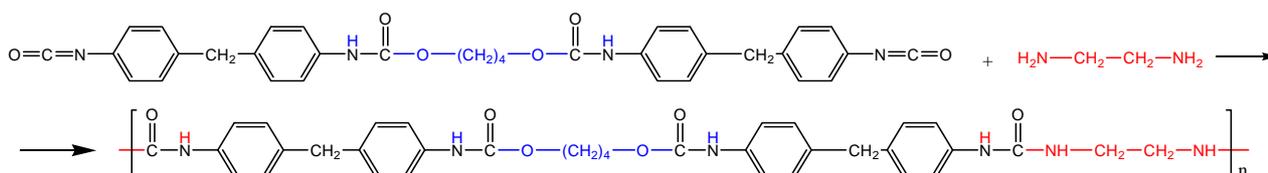
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



segunda etapa : **C + D → P**



Para obtener $n_{\text{UER}} = 1$ UER se precisa $n_{\text{A}} = 1$ molécula de A, $n_{\text{B}} = 2$ moléculas de B (que al reaccionar produce $n_{\text{C}} = 1$ molécula de C) y $n_{\text{D}} = 1$ molécula de D. Por tanto las cantidades de kmoles necesarias son:

$$N_{\text{B}} = \frac{m_{\text{B}}}{M_{\text{wB}}} \quad N_{\text{B}} = 7.992 \times 10^{-3} \text{ kmol de B} \quad m_{\text{B}} = 2 \quad \text{kg de B}$$

$$m_{\text{A}} = \frac{n_{\text{A}}}{n_{\text{B}}} \cdot N_{\text{B}} \cdot M_{\text{wA}} \quad m_{\text{A}} = 0.3602 \quad \text{kg de A}$$

$$m_{\text{C}} = \frac{n_{\text{C}}}{n_{\text{B}}} \cdot N_{\text{B}} \cdot M_{\text{wC}} \quad m_{\text{C}} = 2.3602 \quad \text{kg de C}$$

$$m_{\text{D}} = \frac{n_{\text{D}}}{n_{\text{B}}} \cdot N_{\text{B}} \cdot M_{\text{wD}} \quad m_{\text{D}} = 0.2402 \quad \text{kg de D}$$

Y la masa de polímero obtenida será:

$$m_{\text{P}} = \frac{n_{\text{UER}}}{n_{\text{B}}} \cdot N_{\text{B}} \cdot M_{\text{wUER}} \quad m_{\text{P}} = 2.6004 \quad \text{kg de P}$$

El balance de masas (masa de reactivos = masa de P + masa de productos de bajo peso molecular, si los hay) debe satisfacerse:

Para la primera fase: $m_{\text{A}} + m_{\text{B}} - m_{\text{C}} = 0$

Para la segunda fase: $m_{\text{C}} + m_{\text{D}} - m_{\text{P}} = 0$

Para la reacción global: $m_{\text{A}} + m_{\text{B}} + m_{\text{D}} - m_{\text{P}} = 0$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99