Apellidos: **Iniciales 1er apellido:**

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta **27/06/2016**

Final de julio

Instrucciones:

- En cada pregunta de test, una y sólo una de las afirmaciones a), b) y c) es cierta.
- Calificación del test: acierto $= +1$, fallo $= \; -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto cada una.
- Calificación de los ejercicios: sobre 3 puntos cada uno.
- Tiempo para esta parte del examen: **2 horas.**
- No se permite el uso de calculadoras.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en *Moodle*.

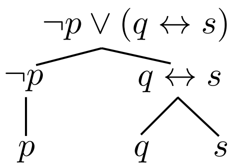
TEST 20 %

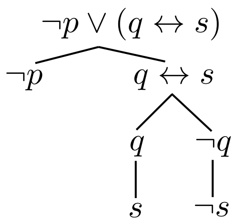
Si la variable proposicional p formaliza el enunciado "*tengo dinero*" y q "*voy al cine*", entonces la formalización del enunciado "*cuando tengo dinero voy al cine*" es:

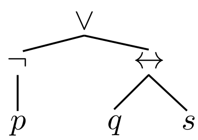
a) $q \to p$. b) $p \to q$. c) $q \leftrightarrow p$.

B

El árbol estructural de la fórmula $\neg p \vee (q \leftrightarrow s)$ es

a) 

b) 

c) 

A

Sea $n \geq 3$. Son eulerianos los grafos

a) P_n. b) Q_n, para n impar. c) K_n, para n impar.

C

Si $a \in \overline{5}$ en $\mathbb{Z}_9$ entonces a puede ser

a) 13. b) 14. c) 15.

B

La fórmula $\neg \exists x \Big(P(x) \wedge \neg Q(x) \Big)$ es equivalente a:

a) $\forall x \Big(P(x) \vee Q(x) \Big)$. b) $\forall x \Big(P(x) \to Q(x) \Big)$. c) $\exists x \Big(P(x) \wedge Q(x) \Big)$.

B

Se construyen todas las palabras que se pueden escribir permutando las letras de la palabra MARCO. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una palabra que empiece por consonante?

a) $\dfrac{3\cdot 4!}{5!}$. b) $\dfrac{3!\cdot 2!}{5!}$. c) $\dfrac{3}{5!}$.

A

Sea $P(n)$ una propiedad sobre el número natural n de la que se sabe que $P(3)$ es cierta y para todo $n \geq 8$, si $P(n)$ es cierta entonces también lo es $P(n+1)$.
En esas condiciones, se puede garantizar que

a) $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 8$.
b) $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 3$.
c) $P(n)$ es cierta en $n = 3$.

C

El conjunto de salida de la función recursiva $\text{PLANA} : \text{LIST}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \{0, 1\}$ definida como

$$\text{PLANA}(L) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{LONG}(L) = 0 \\ 0 & \text{si } \text{LONG}(L) > 0 \text{ y } \text{LISTA}(\text{CAB}(L)) = 1 \\ \text{PLANA}(\text{RESTO}(L)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es

a) $\{[\,]\}$.
b) $\{[\,]\} \cup \{\text{listas de enteros que no son planas}\}$.
c) $\{[\,]\} \cup \{\text{listas de enteros cuya cabeza es una lista}\}$.

C

Se consideran los grafos C_8, Q_3 y $K_{4,4}$, con peso 1 en las aristas. Se verifica que

a) todos admiten un árbol generador de peso mínimo 7.
b) todos admiten un árbol generador de peso mínimo 8.
c) C_8 y Q_3 admiten un árbol generador de peso mínimo 7, pero $K_{4,4}$ no.

A

La tabla de la derecha recoge la distancia entre cada par de vértices de un grafo conexo.

	a	b	c	d	e
a	0	1	3	4	2
b	1	0	4	2	5
c	3	4	0	3	1
d	4	2	3	0	5
e	2	5	1	5	0

Se verifica que:

a) hay dos medianas que son los vértices a y c.
b) hay una única mediana, que es el vértice a.
c) hay una única mediana, que es el vértice d.

B

Apellidos:
Nombre: **Iniciales** 1^{er} **apellido:** | | | |

Lógica y Matemática Discreta Final de julio 27/06/16

DEFINICIONES 10 %

---

1. Definir fórmulas equivalentes.

Aquéllas que tienen exactamente los mismos modelos (o los mismos no modelos).

2. Definir regla básica en una función recursiva $f : A \longrightarrow B$.

Aquélla que define la imagen de un elemento $a \in A$, $f(a)$, de manera explícita, es decir, sin depender de los valores de f en otros elementos de A.

3. Aplicar el Binomio de Newton para desarrollar la expresión $(a+b)^n$.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

.

4. Enunciar la propiedad antisimétrica de una relación binaria $\mathcal{R}$ definida en un conjunto A.

La relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica si para todo par de elementos $a, b \in A$ se verifica que:

$$a\mathcal{R}b \text{ y } b\mathcal{R}a \implies a = b$$

5. Definir grafo regular.

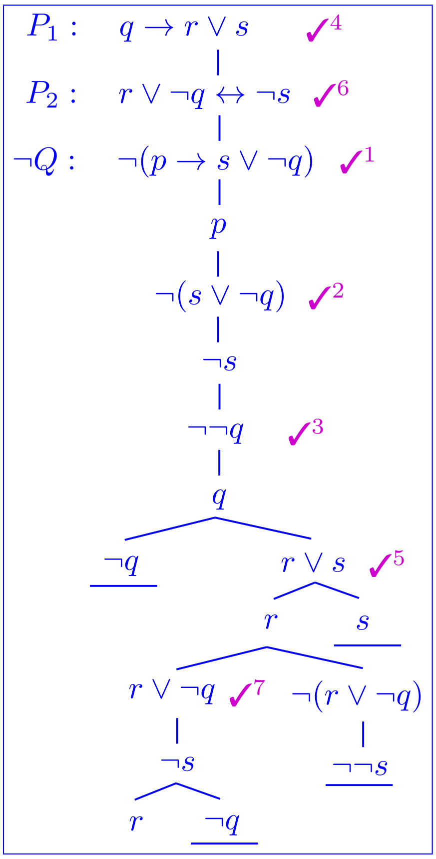
Es un grafo en el que todos los vértices tienen el mismo grado.

EJERCICIOS 30 %

Ejercicio 1. Demostrar que la siguiente estructura deductiva no es correcta y dar un contraejemplo.

$$q \to r \vee s,\;\; r \vee \neg q \leftrightarrow \neg s \qquad \Longrightarrow \qquad p \to s \vee \neg q$$

Usamos el método del tableau para probar que es incorrecta y construir un contraejemplo.



Como el tableau de las premisas junto con la negación de la conclusión es abierto, la estructura deductiva es incorrecta y un contraejemplo se obtiene haciendo verdaderos todos los literales de la rama abierta que ha quedado:

$$v(p) = v(q) = v(r) = 1,\; v(s) = 0$$

Ejercicio 2. Probar la siguiente equivalencia $(p \vee q) \wedge \neg(t \wedge \neg q \to p) \equiv \perp$, indicando la equivalencia elemental usada en cada paso.

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \neg(t \wedge \neg q \to p) &\overset{(1)}{\equiv} \\
(p \vee q) \wedge \Big((t \wedge \neg q) \wedge \neg p\Big) &\overset{(2)}{\equiv} \\
(p \wedge \Big((t \wedge \neg q) \wedge \neg p\Big) \vee (q \wedge \Big((t \wedge \neg q) \wedge \neg p\Big) &\overset{(3)}{\equiv} \\
(p \wedge \Big(\neg p \wedge (t \wedge \neg q)\Big) \vee (q \wedge \Big((\neg q \wedge t) \wedge \neg p\Big) &\overset{(4)}{\equiv} \\
\Big((p \wedge \neg p) \wedge (t \wedge \neg q)\Big) \vee \Big((q \wedge \neg q) \wedge (t \wedge p)\Big) &\overset{(5)}{\equiv} \\
\Big(\perp \wedge (t \wedge \neg q)\Big) \vee \Big(\perp \wedge (t \wedge p)\Big) &\overset{(6)}{\equiv} \\
\perp \vee \perp &\overset{(7)}{\equiv} \\
\perp &
\end{aligned}$$

Donde

(1)	$\neg(A \to B)$	$\equiv$	$A \wedge \neg B$
(2)	Distributiva		
(3)	Conmutativa		
(4)	Asociativa		
(5)	$A \wedge \neg A$	$\equiv$	$\perp$
(6)	$A \wedge \perp$	$\equiv$	$\perp$
(7)	$A \vee A$	$\equiv$	A

Ejercicio 3. Formalizar el siguiente razonamiento en lógica de predicados con el dominio $D = \{ \text{ personas } \}$:

Las personas que abusan del café padecen de insomnio. Cristina duerme más que Esperanza. También hay personas que duermen más que Cristina. Cristina abusa del café pero Esperanza no. Por tanto, Esperanza no sufre insomnio.

Tomando los siguientes símbolos de predicados y constantes, la formalización queda así:

$$
\begin{array}{rl}
P(x): & x \text{ abusa del café} \\
Q(x): & x \text{ padece de insomnio} \\
R(x,y): & x \text{ duerme más que } y \\
a: & \text{Cristina} \\
b: & \text{Esperanza}
\end{array}
\qquad
\boxed{
\begin{array}{l}
\forall x \big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \\
R(a,b) \\
\exists x\, R(x,a) \\
P(a) \wedge \neg P(b) \\
\hline
\neg Q(b)
\end{array}
}
$$

Ejercicio 4. Dadas la fórmula $F = \forall x \Big(\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \vee \neg R(x) \Big)$ y la interpretación I con dominio $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ y las funciones booleanas P, Q, R parcialmente definidas como sigue, completar su definición para que, en cada caso, I sea

a) un modelo de F:

$$
P: \begin{cases} P(d_1) = 0 \\ P(d_2) = 0 \\ P(d_3) = 0 \end{cases}
\qquad
Q: \begin{cases} Q(d_1) = 1 \\ Q(d_2) = 0 \\ Q(d_3) = 0 \end{cases}
\qquad
R: \begin{cases} R(d_1) = 0 \\ R(d_2) = 0 \\ R(d_3) = 0 \end{cases}
$$

b) un no modelo de F:

$$
P: \begin{cases} P(d_1) = 1 \\ P(d_2) = 1 \\ P(d_3) = 1 \end{cases}
\qquad
Q: \begin{cases} Q(d_1) = 1 \\ Q(d_2) = 0 \\ Q(d_3) = 0 \end{cases}
\qquad
R: \begin{cases} R(d_1) = 1 \\ R(d_2) = 1 \\ R(d_3) = 1 \end{cases}
$$

c) un no modelo distinto del dado en **b)**:

$$
P: \begin{cases} P(d_1) = 1 \\ P(d_2) = 0 \\ P(d_3) = 1 \end{cases}
\qquad
Q: \begin{cases} Q(d_1) = 1 \\ Q(d_2) = 0 \\ Q(d_3) = 0 \end{cases}
\qquad
R: \begin{cases} R(d_1) = 1 \\ R(d_2) = 1 \\ R(d_3) = 0 \end{cases}
$$

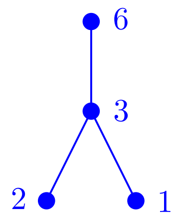
Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida recursivamente como

$$f(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 1 \quad (RB) \\ f\left(\frac{n}{2}\right) + 5n & \text{si } n > 1 \text{ y par} \quad (RR1) \\ 3f(n-1) + f(n-2) & \text{en otro caso} \quad (RR2) \end{cases}$$

Evaluar $f(6)$ siguiendo el esquema recursivo y hallar el árbol de dependencia $T_f(6)$.

$$\begin{aligned} f(6) &\underset{RR1}{=} f(3) + 5 \cdot 6 \\ f(3) &\underset{RR2}{=} 3f(2) + f(1) \\ f(2) &\underset{RR1}{=} f(1) + 5 \cdot 2 \\ f(1) &\underset{RB}{=} 4 \\ f(2) &= 4 + 5 \cdot 2 = 14 \\ f(3) &= 3 \cdot 14 + 4 = 46 \\ f(6) &= 46 + 5 \cdot 6 = 76 \end{aligned}$$

$T_f(6) =$



Ejercicio 6. Probar por inducción que $f(n) = g(n)$ para todo natural $n \geq 0$ siendo $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ las funciones definidas por

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \quad (RB1) \\ 3 & \text{si } n = 1 \quad (RB2) \\ 3f(n-1) - 2f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \quad (RR) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(n) = 2^n + 1$$

Paso base:

- Para $n = 0$: $f(0) \underset{RB1}{=} 2$, $g(0) = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$. Luego $f(0) = g(0)$.
- Para $n = 1$: $f(1) \underset{RB2}{=} 3$, $g(1) = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$. Luego $f(1) = g(1)$.

Paso inductivo: Sea $n \geq 0$ y supongámoslo cierto para n y para $n+1$, es decir,

$$f(n+1) = g(n+1) \quad \text{y} \quad f(n) = g(n) \qquad \text{(H.I.)}$$

Entonces, para $n+2$:

$$\begin{aligned} f(n+2) &\underset{RR\ (n+2 \geq 2)}{=} 3f(n+1) - 2f(n) = \\ &\underset{HI}{=} 3g(n+1) - 2g(n) = \\ &= 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) = 3(2 \cdot 2^n + 1) - 2(2^n + 1) = \\ &= 6 \cdot 2^n + 3 - 2 \cdot 2^n - 2 = \\ &= 4 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+2} + 1 = g(n+2) \end{aligned}$$

también es cierto.

Por el principio de inducción, la igualdad es cierta para todo $n \geq 0$.

Ejercicio 7. La clase de María y Fernando consta de 25 alumnos. Se quieren elegir comités de 5 personas. ¿Cuántos comités se pueden formar si al menos uno de los miembros debe ser o bien María o bien Fernando?

Sean A y B los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Comités de 5 personas en los que está María}\} \\ B &= \{\text{Comités de 5 personas en los que está Fernando}\} \end{aligned}$$

Entonces lo que se pide es el cardinal de $A \cup B$. Una forma de calcular dicho cardinal es mediante el complementario: los comités buscados son todos salvo aquellos en los que no están ni Fernando ni María. Si optamos por esta segunda vía, debemos calcular el cardinal de dos conjuntos

- Todos los comités de 5 personas: son selecciones no ordenadas de 5 elementos de un conjunto de 25, es decir, combinaciones de 5 elementos de un conjunto de 25: hay $\binom{25}{5}$.
- Todos los comités de 5 personas en los que no están ni María ni Fernando: son todas las selecciones no ordenadas de 5 elementos de un conjunto de 23 (excluimos a María y Fernando). Por tanto, son combinaciones de 5 elementos de un conjunto de 23: hay $\binom{23}{5}$.

Total:

$$\binom{25}{5} - \binom{23}{5} = \frac{25!}{5!20!} - \frac{23!}{5!18!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 23 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 7$$

Otra forma: para obtener el cardinal de $A \cup B$, como los conjuntos A y B no son disjuntos, usamos el principio de inclusión-exclusión y se tiene $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. En este caso:

- Todos los comités de 5 personas en los que está María: consideramos que María está en el comité y, para completar, debemos realizar una selección no ordenada de 4 elementos de un conjunto de 24. Por tanto, hay tantas formas como combinaciones de 4 elementos de un conjunto de 24: hay $\binom{24}{4}$. De manera análoga se calcula el cardinal de los comités en los que está Fernando.
- Todos los comités de 5 personas en los que están María y Fernando: son todas las selecciones no ordenadas de 3 elementos de un conjunto de 23 (ya incluimos a María y Fernando). Por tanto, son combinaciones de 3 elementos de un conjunto de 23: hay $\binom{23}{3}$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2 \cdot \binom{24}{4} - \binom{23}{3} = 2 \cdot \frac{24!}{4!20!} - \frac{23!}{3!20!} = (12-1) \cdot \frac{23!}{3!20!}$$

Ejercicio 8. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$, se considera la relación de equivalencia

$$x \mathcal{R} y \iff \text{la suma de las cifras de } x \text{ es igual a la suma de las cifras de } y$$

a) Describir la clase $\overline{40}$ y enumerar todos sus elementos.

b) Dar una clase de equivalencia que tenga 6 elementos.

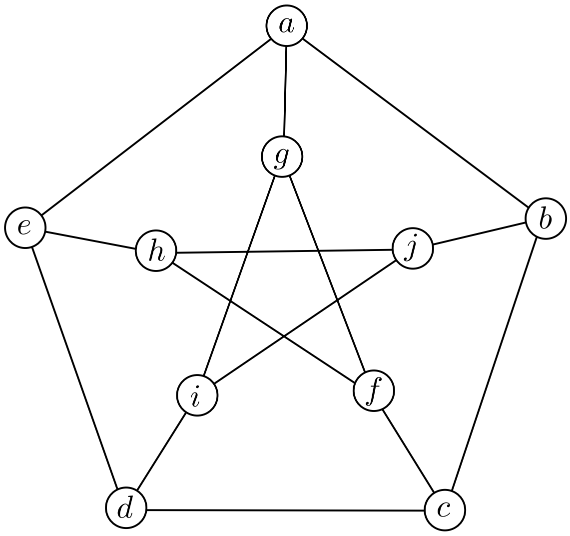
c) Dar, razonadamente, una clase de equivalencia que conste de un solo elemento.

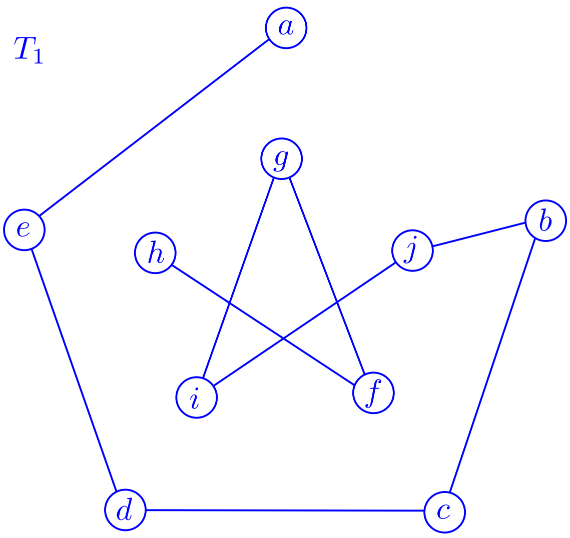
a) $\overline{40} = \{x \in A \,/\, \text{la suma de las cifras de } x \text{ sea4}\} = \{04, 13, 22, 31, 40\}$

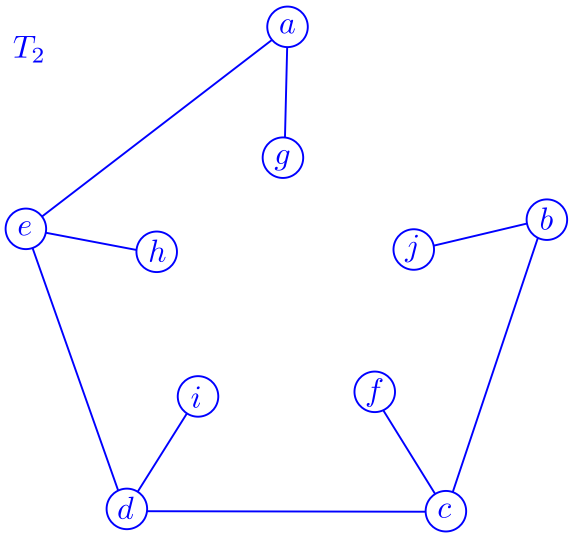
b) $\overline{5} = \{05, 14, 23, 32, 41, 50\}$

c) En el conjunto A, la suma máxima que puede darse es 18, que se consigue con el número 99, de manera única. Luego $\overline{99} = \{99\}$.

Ejercicio 9. Dar dos árboles recubridores, T_1 y T_2, del grafo de la figura tales que no sean isomorfos entre sí. Justificar por qué no lo son.







T_1 y T_2 son dos árboles recubridores del grafo dado porque son subgrafos del grafo, son árboles y tienen todos los vértices del grafo.

No son isomorfos porque T_1 es un camino, y por tanto sus vértices tienen grado uno (a y h) y dos (el resto), mientras que T_2 no lo es, ya que, en particular tiene vértices de grado tres (c, d y e).

(El ejercicio 10 forma parte del problema 4 de la segunda parte del examen)

Lógica y Matemática Discreta **Final de julio** 27/06/2016

Problema 1 (12 %)

Se pide:

a) *(7 puntos)* Utilizar el método del tableau para determinar si la siguiente estructura deductiva de lógica de predicados es correcta:

$$\forall x \,\big(P(x) \to \exists y\, R(x,y)\big),\ \exists x\, \neg\big(P(x) \to Q(x)\big) \quad \Rightarrow \quad \exists x\, \exists y\, R(x,y)$$

En caso afirmativo, demostrarlo por reglas de inferencia.

Solución: Veamos si la estructura deductiva $P_1,\, P_2 \;\Rightarrow\; Q$ es correcta analizando el tableau asociado.

$$
\begin{array}{lccl}
1. & \forall x \,\big(P(x) \to \exists y\, R(x,y)\big) & & \\
 & \downarrow & & \\
2. & \exists x\, \neg\big(P(x) \to Q(x)\big) & & \checkmark^{1} \\
 & \downarrow & & \\
3. & \neg \exists x\, \exists y\, R(x,y) & & \checkmark^{5} \\
 & \downarrow & & \\
4. & \neg\big(P(a) \to Q(a)\big) & & \text{(Eliminación existencial } x=a \text{ en 2)} \quad \checkmark^{2} \\
 & \downarrow & & \\
5. & P(a) & & \\
 & \downarrow & & \\
6. & \neg\, Q(a) & & \\
 & \downarrow & & \\
7. & P(a) \to \exists y\, R(a,y) & & \text{(Instancia universal } x=a \text{ en 1)} \quad \checkmark^{3} \\
 & \swarrow \quad \searrow & & \\
8. & \underline{\neg P(a)} \qquad \exists y\, R(a,y) & & \checkmark^{4} \\
 & \qquad\quad \downarrow & & \\
9. & \qquad\quad R(a,b) & & \text{(Eliminación existencial } y=b \text{ en 8)} \\
 & \qquad\quad \downarrow & & \\
10. & \qquad\quad \forall x\, \neg \exists y\, R(x,y) & & \text{(Simplificación en 3)} \\
 & \qquad\quad \downarrow & & \\
11. & \qquad\quad \neg \exists y\, R(a,y) & & \text{(Instancia universal } x=a \text{ en 10)} \quad \checkmark^{6} \\
 & \qquad\quad \downarrow & & \\
12. & \qquad\quad \forall y\, \neg R(a,y) & & \text{(Simplificación en 11)} \\
 & \qquad\quad \downarrow & & \\
13. & \qquad\quad \underline{\neg R(a,b)} & & \text{(Instancia universal } y=b \text{ en 12)}
\end{array}
$$

El tableau queda cerrado y, por tanto, la estructura deductiva es correcta.

Comprobamos ahora que es correcta mediante reglas de inferencias y razonando por reducción al absurdo:

1.	$\forall x\,\big(P(x) \to \exists y\, R(x,y)\big)$	Premisa
2.	$\exists x\,\neg\big(P(x) \to Q(x)\big)$	Premisa
3.	$\neg\,(\exists x\, \exists y\, R(x,y))$	Negación Conclusión
4.	$\neg\big(P(a) \to Q(a)\big)$	Eliminación de cuantificador existencial en 2.
5.	$P(a) \wedge \neg\, Q(a)$	Eq.: $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$, en 4.
6.	$P(a)$	Simplificación en 5
7.	$P(a) \to \exists y\, R(a,y)$	Instancia universal $x = a$ en 1.
8.	$\exists y\, R(a,y)$	Modus Ponens, en 6 y 7.
9.	$R(a,b)$	Eliminación de cuantificador existencial, $y = b$, en 8.
10.	$\forall x\,\neg\,\exists y\, R(x,y)$	Eq.: $\neg\exists x\, A \equiv \forall x\,\neg\, A$, en 3.
11.	$\neg\,\exists y\, R(a,y)$	Instancia universal $x = a$ en 10.
12.	$\forall y\,\neg\, R(a,y)$	Eq.: $\neg\exists x\, A \equiv \forall x\,\neg\, A$, en 11.
13.	$\neg\, R(a,b)$	Instancia universal $y = b$ en 12.
14.	$\neg\, R(a,b) \wedge R(a,b)$	Conjunción, en 13 y 9.
15.	$\perp$	Eq. de 14.

Como $P_1,\, P_2,\, \neg Q \;\Rightarrow\; \perp$ es correcta, la estructura de partida también lo es.

b) *(3 puntos)* Sabiendo que la siguiente estructura deductiva de lógica de proposiciones

$$P_1,\, P_2,\, P_3 \;\Longrightarrow Q$$

es correcta, decidir si el conjunto de fórmulas $\{P_1,\, P_2 \leftrightarrow P_3,\, P_3,\, \neg Q\}$ es insatisfactible o no.

Solución: Por hipótesis $P_1,\, P_2,\, P_3 \;\Longrightarrow\; Q$ es correcta, de donde $\{P_1,\, P_2,\, P_3,\, \neg Q\}$ es insatisfactible. Veamos que, en esas condiciones, el conjunto $\{P_1,\, P_2 \leftrightarrow P_3,\, P_3,\, \neg Q\}$ también es insatisfactible. Una manera de probarlo es con el método del tableau. En ese caso, la hipótesis equivale a que el tableau del conjunto $\{P_1,\, P_2,\, P_3,\, \neg Q\}$ es cerrado. Veamos que el tableau de $\{P_1,\, P_2 \leftrightarrow P_3,\, P_3,\, \neg Q\}$ también lo es. En efecto,

$$\begin{array}{llcl}
1. & & P_1 & \\
 & & \downarrow & \\
2. & & P_2 \leftrightarrow P_3 & \checkmark^1 \\
 & & \downarrow & \\
3. & & P_3 & \\
 & & \downarrow & \\
4. & & \neg Q & \\
 & & \swarrow \quad \searrow & \\
5. & & P_2 \qquad \neg P_2 & \\
 & & \downarrow \qquad \downarrow & \\
6. & & P_3 \qquad \underline{\neg P_3} &
\end{array}$$

La rama de la izquierda es cerrada ya que, por hipótesis, el conjunto $\{P_1,\, P_2,\, P_3,\, \neg Q\}$ es insatisfactible. Por tanto, el tableau es cerrado y en consecuencia el conjunto dado es insatisfactible.

Problema 2 (10 %)

Se considera la función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathrm{LIST}_P(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n,m,L) = \begin{cases} n \cdot m & \text{si } L = [\,] \quad (RB) \\ f(n + \mathrm{CAB}(L), m, \mathrm{RESTO}(L)) & \text{si } \mathrm{CAB}(L) \geq 0 \quad (RR1) \\ f(n, m + \mathrm{CAB}(L), \mathrm{RESTO}(L)) & \text{si } \mathrm{CAB}(L) < 0 \quad (RR2) \end{cases}$$

Se pide:

a) *(2 puntos)* Evaluar detalladamente $f\big(0,0,[3,-2,-4,5]\big)$ siguiendo el esquema recursivo propuesto.

Solución:

$$\begin{aligned} f\big(0,0,[3,-2,-4,5]\big) &\underset{RR1}{=} f\big(0+3,0,[-2,-4,5]\big) \\ f\big(3,0,[-2,-4,5]\big) &\underset{RR2}{=} f\big(3,0+(-2),[-4,5]\big) \\ f\big(3,-2,[-4,5]\big) &\underset{RR2}{=} f\big(3,-2+(-4),[5]\big) \\ f\big(3,-6,[5]\big) &\underset{RR1}{=} f\big(3+5,-6,[\,]\big) \\ f\big(8,-6,[\,]\big) &\underset{RB}{=} 8 \cdot (-6) = -48 \end{aligned}$$

b) *(2 puntos)* Describir qué devuelve $f(0,0,L)$, para L una lista plana no vacía cualquiera.

Solución: $f(0,0,L)$ devuelve el producto de dos sumas: la suma de los números enteros positivos que aparecen en L y la suma de los negativos. En efecto,

- Si la cabeza es un entero positivo, lo suma a la primera componente del argumento, que en inicio vale 0, y lo borra de la lista. Cada vez que la cabeza sea positiva, se va realizando esa suma acumulada.
- Análogamente, si el entero que ocupa la cabeza de L es negativo, la suma de este valor se realiza en la segunda componente del argumento de la función.
- Cuando la lista se vacía, se aplica la regla básica que devuelve el producto de las dos primeras componentes, donde se almacenan las sumas acumuladas.

c) *(5 puntos)* Construir una función recursiva $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathrm{LIST}_P(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que, para L una lista plana no vacía, $g(0,0,L)$ sea el producto de dos sumas: la suma de los números enteros que ocupan posición impar en L y la suma de los que ocupan posición par.

Solución: Buscamos primero una regla recursiva.
Tomemos una lista plana genérica $L = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$ de longitud $k \geq 2$. Siguiendo un desarrollo análogo al de la función f, para que $g(0,0,L)$ devuelva las sumas de los que ocupan posición impar por un lado y la suma de los que ocupan posición par por otro, basta con ir eligiendo en cada llamada recursiva los dos primeros elementos de la lista:

- el primer elemento de L, $\mathrm{CAB}(L)$, se lo sumamos a la primera componente del argumento, n.
- el segundo elemento de L, $\mathrm{CAB}(\mathrm{RESTO}(L))$, se lo sumamos a la segunda componente del argumento, m.
- eliminamos estos dos elementos en la llamada recursiva.

En definitiva, la regla recursiva es:

$$g(n,m,L) = g\big(n + \mathrm{CAB}(L), m + \mathrm{CAB}(\mathrm{RESTO}(L)), \mathrm{RESTO}(\mathrm{RESTO}(L))\big)$$

Esta regla tiene sentido si $\mathrm{LONG}(L) \geq 2$. Por ello son necesarias dos reglas básicas para cerrar la recursividad: cuando $L = [\,]$ y cuando $\mathrm{LONG}(L) = 1$.

- Para $g(n,m,[\,])$: si realizando sucesivas llamadas recursivas llegamos a este caso, es que la longitud de la lista L era par, pues se han ido eliminando elementos de L por parejas. Así, las sumas acumuladas de los que ocupan posición impar estarán almacenados en la primera componente del argumento y la de los que ocupan posición par en la segunda. Por tanto, podemos cerrar este caso con la siguiente regla básica

$$g(n,m,[\,]) = n \cdot m$$

- Para $g(n,m,[a])$: si, por el contrario, realizando las llamadas recursivas llegamos a este caso, es que la longitud de la lista L era impar. Por tanto el valor $\mathrm{CAB}(L)$ hay que sumarlo a n y podemos cerrar el caso mediante la regla básica:

$$g(n,m,L) = (n + \mathrm{CAB}(L)) \cdot m, \quad \text{si } \mathrm{LONG}(L) = 1$$

Finalmente, la función pedida $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathrm{LIST}_P(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ queda definida recursivamente del siguiente modo:

$$g(n,m,L) = \begin{cases} n \cdot m & \text{si } L = [\,] \ \text{(RB1)} \\ (n + \mathrm{CAB}(L)) \cdot m & \text{si } \mathrm{LONG}(L) = 1 \ \text{(RB2)} \\ g\big(n + \mathrm{CAB}(L), m + \mathrm{CAB}(\mathrm{RESTO}(L)), \mathrm{RESTO}(\mathrm{RESTO}(L))\big) & \text{e.o.c. (RR)} \end{cases}$$

Observación: Al igual que en el apartado a), la evaluación $g(0,0,[\,])$ no tiene el mismo sentido que $g(0,0,L)$ con $L \neq [\,]$. Si $L = [\,]$ no tiene sentido operar con los elementos de L, pero esta regla permite cerrar la recursividad del caso general y obtener lo que se pide.

d) *(1 punto)* Elegir ejemplos significativos para comprobar que la definición propuesta es correcta.

SOLUCIÓN: Se trata de comprobar, mediante ejemplos, que $g(0,0,L)$ es el producto de la suma de los números enteros que ocupan posición impar en L por la suma de los que ocupan posición par.

Mientras la lista tenga longitud ≥ 2 se aplica la regla recursiva, que va eliminando elementos por parejas, hasta llegar a listas de longitud 0 o 1, en cuyo caso hay dos reglas básicas diferentes. Por ello, para comprobar que la función devuelve lo pedido, habrá que elegir dos ejemplos de evaluación: una lista de longitud par y otra de longitud impar.

Por ejemplo, tomamos $L_1 = [2,3,1]$ y $L_2 = [2,3,1,4]$.

- Para L_1:

$$\begin{aligned} g\big(0,0,[2,3,1]\big) &\underset{RR}{=} g\big(0+2, 0+3, [1]\big) \\ g\big(2,3,[1]\big) &\underset{RB2}{=} (2+1)\cdot 3 \end{aligned}$$

- Para L_2:

$$\begin{aligned} g\big(0,0,[2,3,1,4]\big) &\underset{RR}{=} g\big(0+2, 0+3, [1,4]\big) \\ g\big(2,3,[1,4]\big) &\underset{RR}{=} g\big(2+1, 3+4, [\,]\big) \\ g\big(2+1,3+4,[\,]\big) &\underset{RB1}{=} (2+1)\cdot(3+4) \end{aligned}$$

Se ve que en ambos casos la función devuelve lo pedido.

Problema 3 (10 %)

Sea X el conjunto de las palabras con 5 caracteres en las que el primero es una de las letras del conjunto $\{a, b, c\}$ y los 4 caracteres restantes son bits:

$$X = \{x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \,/\, x_1 \in \{a, b, c\},\ x_i \in \{0, 1\},\ \forall i \neq 1\}$$

Se pide:

a) *(2 puntos)* Hallar el cardinal de X y el de

$$Y = \{\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \in X \,/\, x_1 = a \ \text{ y } \ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2\}$$

Solución: Para obtener el cardinal de X construiremos sus elementos en un proceso en dos pasos. En el primero elegimos el primer carácter y en el segundo elegimos los cuatro últimos bits. Para el primer carácter tenemos tres posibilidades. Para las restantes cuatro posiciones, hay tantas opciones como selecciones ordenadas de dos elementos, 0 y 1, tomados de cuatro en cuatro, con repetición. Por el principio de multiplicación, se tiene que:

$$|X| = 3 \cdot VR(2, 4) = 3 \cdot 2^4$$

En cuanto al cardinal de $Y = \{\, \boldsymbol{a}\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \in X \,/\, x_2 + \ldots + x_5 = 2\}$, la forma de completar las cuatro últimas posiciones viene dada por las formas de seleccionar dos elementos (donde van a ir los unos), de un conjunto de 4, $\{x_2, \ldots, x_5\}$, sin repetición y donde lo que importa son los elementos seleccionados y no el orden en que los elijo. Es decir, elegir x_2x_5 es lo mismo que elegir x_5x_2, pues proporciona la cadena 1001 en ambos casos. Por tanto, se trata de combinaciones de 4 elementos tomados de dos en dos. En definitiva:

$$|Y| = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,4!} = 6$$

b) En X se define la relación de orden $\preccurlyeq$:

$$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \ \preccurlyeq \ y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 \leq_{Lex} y_1 & \text{(orden alfabético)} \\ \quad \text{y} & \\ x_i \leq y_i \text{ si } i \in \{2, 3, 4, 5\} & \text{(orden usual)} \end{cases}$$

1. *(2 puntos)* Probar que $(X, \preccurlyeq)$ no es un conjunto totalmente ordenado pero que sí tiene máximo y mínimo.

Solución: Los elementos $c0000$ y $a1111$ no son comparables. En efecto,

- $c0000 \not\preccurlyeq a1111$ pues $c \not\leq_{Lex} a$.
- $a1111 \not\preccurlyeq c0000$ pues $1 \not\leq 0$.

Luego, al haber elementos no comparables, el orden es parcial y no total. Sin embargo,

- $(X, \preccurlyeq)$ tiene elemento mínimo: $a0000 \preccurlyeq x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$ con $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \in X$, pues $a \leq_{Lex} x_1$ y $0 \leq x_i$, para todo $i \in \{2, 3, 4, 5\}$.
- $(X, \preccurlyeq)$ tiene elemento máximo: de manera análoga, se verifica que $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \preccurlyeq c1111$ para todo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \in X$.

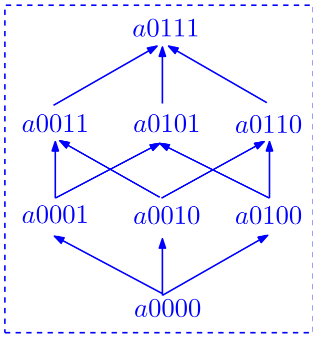
2. *(3 puntos)* Se considera el conjunto $A = \{$ palabras de X que empiecen por $a0$ $\}$. Hallar el diagrama de Hasse de A y sus elementos notables.

Solución: Se verifica que

$$A = \{a0x_1\,x_2\,x_3 \;/\; x_i \in \{0,1\},\, \forall i \in \{1,2,3\}\} \qquad \text{y} \qquad |A| = 2^3 = 8$$

El diagrama de Hasse de la relación es el de la figura, ya que por definición de esta relación, se verifica que:

- $a0000$ es mínimo y único minimal y $a0111$ es máximo y único maximal.
- Dos palabras con el mismo número de unos (o de ceros) no son comparables entre sí.
- Una palabra p es menor que otra q si los bits nulos de q también son cero en p.

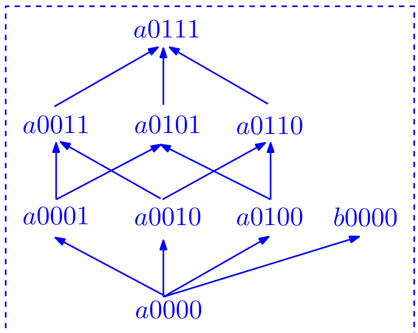


3. *(3 puntos)* Hallar el diagrama de Hasse del conjunto $B = A \cup \{b0000\}$. Razonar si B tiene máximo. Dar los elementos de X que son mayores que todos los elementos de B.

Solución: Para obtener el nuevo diagrama de Hasse, comparamos $b0000$ con los elementos de A. Resulta que:

- $a0000 \preccurlyeq b0000$ pues $a \leq_{Lex} b$ y $0 \leq 0$.
- Para los restantes elementos $a0\,x_1x_2x_3$ de A, con $a0\,x_1x_2x_3 \neq a0000$, se tiene que $a0\,x_1x_2x_3 \not\preccurlyeq b0000$ pues $1 \neq 0$.

Luego $b0000$ sólo es comparable con $a0000$ y, por tanto, el nuevo diagrama de Hasse es el de la figura: los elementos $a0111$ y $b0000$ son maximales, pues ninguno tiene en el conjunto B un elemento que sea mayor que ellos. Como hay dos maximales, B no admite máximo.



Para obtener los elementos de X mayores que todos los de B, basta buscar aquellos que son mayores que los dos maximales pues, por transitividad, serán mayores que los restantes elementos de B. Sea $x_1x_2x_3x_4x_5$ uno de tales elementos. Entonces:

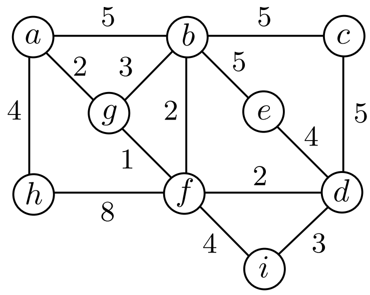
- Si $b0000 \preccurlyeq x_1x_2x_3x_4x_5 \Rightarrow b \leq_{Lex} x_1 \Rightarrow x_1 \in \{b, c\}$.
- Si $a0111 \preccurlyeq x_1x_2x_3x_4x_5 \Rightarrow 0 \leq x_2$ y $x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

Por tanto, el conjunto de los elementos que son mayores que cualquier elemento de B es

$$\{b0111,\, b1111,\, c0111,\, c1111\}$$

Problema 4 (8 %)

El grafo de la figura siguiente representa las salas de proyección de películas de una capital en la que se celebra un festival de cine. Los pesos de las aristas representan los kilómetros de las avenidas que conectan las diferentes salas de proyección. El programa del festival asigna a cada sala una sola película cada día. Se pide:



a) (B) Usar el algoritmo de Dijkstra para obtener las distancias de f a los restantes vértices del grafo y hallar un árbol de caminos mínimos desde f.

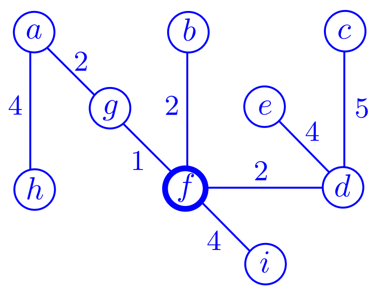
SOLUCIÓN: La ejecución del algoritmo de Dijkstra se resume en la siguiente tabla:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	Camino
f	∞	2	∞	2	∞	0	1	8	4	f
g	3	2	∞	2	∞	–	–	8	4	f,g
b	3	–	7	2	7	–	–	8	4	f,b
d	3	–	7	–	6	–	–	8	4	f,d
a	–	–	7	–	6	–	–	7	4	f,g,a
i	–	–	7	–	6	–	–	7	–	f,i
e	–	–	7	–	–	–	–	7	–	f,d,e
c	–	–	–	–	–	–	–	7	–	f,d,c
h	–	–	–	–	–	–	–	–	–	f,g,a,h

De donde se extrae que la distancia de f a los demás vértices es:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$d(f,\cdot)$	3	2	7	2	6	0	1	7	4

y un árbol de caminos mínimos desde f es:



b) *(2 puntos)* La tabla con los datos de las distancias entre las salas está parcialmente rellena. Sin aplicar nuevamente el algoritmo de Dijkstra, y sabiendo que un árbol de caminos mínimos desde g es el siguiente, completar razonadamente los valores de la tabla.

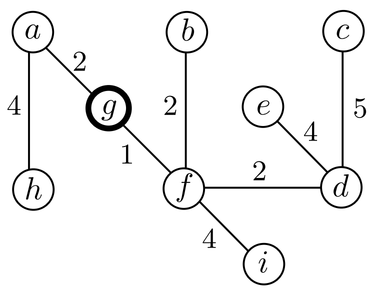
Solución: Los valores de la tabla que faltan se obtienen del modo siguiente:

1. Usando el resultado del apartado anterior, tenemos los datos de la tabla correpondientes a la fila de f, pues conocemos $d(f,x)$, para todo $x \in V$.

2. Usando las propiedades de la distancia, sabemos que los valores de la diagonal de la tabla son 0 porque $d(x,x) = 0$, para todo $x \in V$. Además, la tabla es simétrica porque $d(x,y) = d(y,x)$, para todo $x, y \in V$.

3. El árbol de caminos mínimos desde g proporciona las distancias de g a los restantes vértices del grafo: la distancia de g a x, con $x \in V$, es la suma de los pesos de las aristas del único camino que conecta a g con x en dicho árbol.

Por todo lo anterior, la tabla completa es:



	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	0	5	10	5	9	3	2	4	7
b	5	0	5	4	5	2	3	9	6
c	10	5	0	5	9	7	8	14	8
d	5	4	5	0	4	2	3	9	3
e	9	5	9	4	0	6	7	13	7
f	3	2	7	2	6	0	1	7	4
g	2	3	8	3	7	1	0	6	5
h	4	9	14	9	13	7	6	0	11
i	7	6	8	3	7	4	5	11	0

c) *(2 puntos)* Felipe quiere alquilar un piso en uno de los edificios donde están situadas las salas, de forma que si un día desea ver una película cualquiera del festival, lo pueda hacer empleando la menor cantidad de tiempo posible en desplazamientos. ¿Dónde debe alquilar un piso que satisfaga ese requisito?

Solución: El lugar más conveniente, en términos del grafo, será el vértice que minimice la distancia al más alejado, es decir, un centro del grafo. Así que en la tabla del apartado anterior buscamos el vértice x tal que $R(x)$, su radio, sea mínimo. Se tiene que

x	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$R(x)$	10	9	14	9	13	**7**	8	14	11

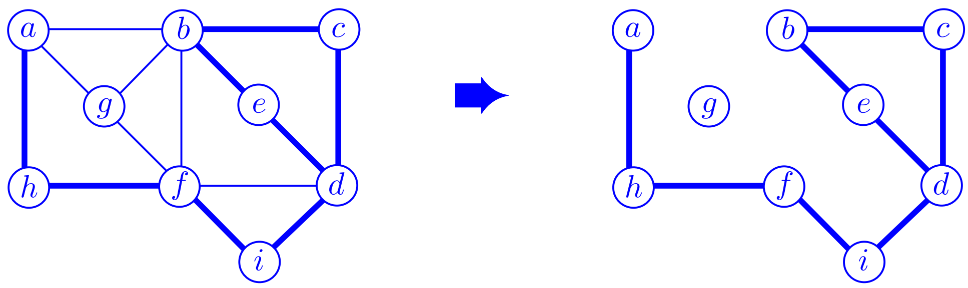
Por tanto, el lugar adecuado para alquilar un piso será en el edificio de la sala $\boldsymbol{f}$.

d) *(2 puntos)* En dicho festival se proyectan películas que son comedias o de suspense. ¿Pueden ofertarse de forma que salas conectadas directamente no proyecten películas del mismo género?

SOLUCIÓN: Consideramos los conjuntos de vértices V_1 formado por las salas donde se proyectan comedias y V_2 formado por las salas donde se proyectan películas de suspense. En ese caso, la oferta puede realizarse si el grafo es bipartito, pues las aristas solo pueden conectar vértices de V_1 con vértices de V_2. Obviamente, la respuesta es negativa ya que un grafo es bipartito si y sólo si no admite ciclos de longitud impar y se observa claramente que i, d, f, i es un ciclo de longitud 3.

e) *(2 puntos)* Felipe desea saber qué película se proyecta en cada sala y para ello decide visitarlas todas. ¿Puede hacer un recorrido en coche desde su piso, sin repetir sala y volviendo a casa?

SOLUCIÓN: En este caso se desea visitar todos los vértices del grafo, volviendo al de partida, sin repetir vértice. Por tanto, la respuesta será afirmativa si el grafo es hamiltoniano. Veamos si lo es. Para ello, sabemos que si un vértice tiene grado 2, las dos aristas que inciden en ese vértice deben formar parte del ciclo hamiltoniano. Cuando incluimos todas las aristas con esa característica, obtenemos el subgrafo siguiente:



Y se observa que en el vértice d inciden más de dos aristas, cosa imposible en un ciclo hamiltoniano. Por tanto, el grafo no es hamiltoniano y por ello **no** se puede realizar el recorrido solicitado.

f) *(2 puntos)* El árbol de caminos mínimos desde g del apartado b), ¿es un árbol recubridor de peso mínimo? Razonar la respuesta.

SOLUCIÓN: El árbol de caminos mínimos dado es un árbol recubridor, pues es un árbol, que es subgrafo y contiene todos los vértices de G. Sin embargo no es de peso mínimo. Para ello basta con observar que el árbol obtenido sustituyendo la arista fi de peso 4 por la arista di de peso 3, proporciona un árbol recubridor con peso una unidad menos que el dado. Por tanto, el árbol de caminos mínimos desde g **no** es de peso mínimo.