LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. **27/10/2015**

Apellidos y Nombre:..

Indicaciones: **Tres primeras letras del primer apellido:**

- No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto.
- Cada ejercicio se puntuará sobre 3 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras ni móviles.
- Tiempo total para el examen: 2h

Preguntas de test (20%)

Si la variable proposicional p formaliza el enunciado "tú sabes ortografía" y q " tú escribes bien en Whatsapp", entonces la formalización del enunciado "no escribes bien en Whatsapp y sin embargo sabes ortografía" es:

a) $\neg p \to q$ b) $p \to \neg q$ c) $\neg q \wedge p$

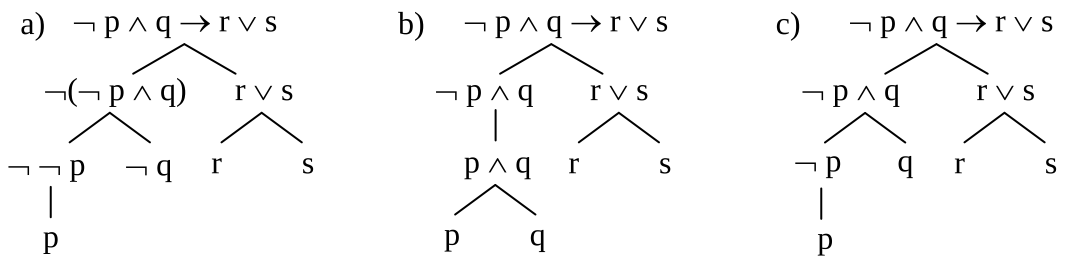
C

El conjunto de fórmulas $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\, F\}$ es insatisfactible si F es:

a) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$. b) $\exists x\,(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$. c) $\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$.

A

El árbol estructural de la fórmula $\neg p \wedge q \to r \vee s$ es:



C

La fórmula $\exists x \neg Q(x) \vee \forall x\, P(x)$ es equivalente a la fórmula:

a) $\exists x\, Q(x) \to \forall x\, P(x)$ b) $\forall x\,(Q(x) \to P(x))$ c) $\forall x\, Q(x) \to \forall x\, P(x)$

C

Tomando como dominio D = {personas} y como predicados $V(x)$ = "x es varón" y $I(x, y)$ = "x es igual a y", la formalización del enunciado "Todos los varones son iguales" es:

a) $\forall x\, \forall y\, (V(x) \wedge V(y) \wedge I(x, y))$
b) $\forall x\, \forall y\, (V(x) \wedge V(y) \to I(x, y))$
c) $\forall x\, \forall y\, (I(x, y) \to V(x) \wedge V(y))$

B

La estructura deductiva $p \vee q,\ p \to r \Rightarrow r \vee p$ verifica que:

a) es incorrecta y $V(p) = V(r) = 0$, $V(q) = 1$ es un contraejemplo.
b) es incorrecta y $V(p) = V(q) = V(r) = 0$ es un contraejemplo.
c) es correcta.

A

Definiciones (10%)

1. Definir modelo de una fórmula F en la lógica de predicados.

   Se dice que la interpretación I es **modelo** de una fórmula F si F toma valor de verdad 1 bajo esta interpretación.

2. Definir estructura deductiva correcta.

   Una estructura deductiva $P_1, P_2, \ldots, P_n \Rightarrow Q$ es **correcta** si los modelos comunes a todas las premisas son modelos de la conclusión. Es decir, todo modelo del conjunto $\Phi = \{ P_1, P_2, \ldots, P_n \}$ es también modelo de Q.

Ejercicios (30%)

1. Determinar, utilizando el método del tableau, si la fórmula $F = (p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$ es tautología, contradicción o contingente.

$$
\begin{array}{c}
\neg\, ((p \to q) \wedge \neg q \to \neg p) \\
| \\
(p \to q) \wedge \neg q \\
| \\
\neg \neg p \\
| \\
p \\
| \\
p \to q \\
| \\
\neg q \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg p \qquad\qquad q \\
+ \qquad\qquad +
\end{array}
$$

Como el tableau de $\neg$ F es cerrado, la fórmula $\neg$ F es contradicción y, por tanto, F es tautología.

2. Demostrar la equivalencia $\neg (q \to p) \wedge (\neg p \to q) \equiv \neg p \wedge q$ usando las equivalencias proposicionales elementales dadas, indicando en cada paso las que se han utilizado.

$$\neg (q \to p) \wedge (\neg p \to q) \underset{(1)}{\equiv} (q \wedge \neg p) \wedge (\neg \neg p \vee q) \underset{(2)}{\equiv} (q \wedge \neg p) \wedge (p \vee q) \underset{(3)}{\equiv}$$
$$\underset{(3)}{\equiv} ((q \wedge \neg p) \wedge p) \vee ((q \wedge \neg p) \wedge q)) \underset{(4)}{\equiv} (q \wedge (\neg p \wedge p)) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge q)) \underset{(5)}{\equiv}$$
$$\underset{(5)}{\equiv} (q \wedge \perp) \vee (\neg p \wedge (q \wedge q)) \underset{(6)}{\equiv} \perp \vee (\neg p \wedge q) \underset{(7)}{\equiv} \neg p \wedge q$$

(1) $\neg (A \to B) \equiv A \wedge \neg B$, $A \to B \equiv \neg A \vee B$ (2) $\neg \neg A \equiv A$
(3) Distributiva: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (4) Asociativa, Conmutativa
(5) $A \wedge \neg A \equiv \perp$, Asociativa (6) $A \wedge \perp \equiv \perp$, $A \wedge A \equiv A$
(7) $\perp \vee A \equiv A$

Otra forma:

$$\neg (q \to p) \wedge (\neg p \to q) \underset{(1)}{\equiv} (q \wedge \neg p) \wedge (\neg \neg p \vee q) \underset{(2)}{\equiv} (q \wedge \neg p) \wedge (p \vee q) \underset{(3)}{\equiv} (\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \underset{(4)}{\equiv}$$
$$\underset{(4)}{\equiv} \neg p \wedge (q \wedge (p \vee q)) \underset{(5)}{\equiv} \neg p \wedge q$$

(1) $\neg (A \to B) \equiv A \wedge \neg B$, $A \to B \equiv \neg A \vee B$ (2) $\neg \neg A \equiv A$
(3) Conmutativa (4) Asociativa (5) Absorción

3. Dadas la fórmula $F = \forall x\, (P(x) \vee Q(x) \leftrightarrow R(x))$ y la interpretación I con dominio $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ y funciones booleanas P, Q y R, parcialmente definidas, se pide completar su definición para que la interpretación I sea:

   a) un modelo de la fórmula F:

$$P: \begin{cases} P(d_1) = 0 \\ P(d_2) = 0 \\ P(d_3) = 1 \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} Q(d_1) = 0 \\ Q(d_2) = 1 \\ Q(d_3) = 0 \end{cases} \qquad R: \begin{cases} R(d_1) = 0 \\ R(d_2) = 1 \\ R(d_3) = 1 \end{cases}$$

   b) un modelo de la fórmula F distinto del dado en el apartado a):

$$P: \begin{cases} P(d_1) = 0 \\ P(d_2) = 1 \\ P(d_3) = 1 \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} Q(d_1) = 0 \\ Q(d_2) = 1 \\ Q(d_3) = 1 \end{cases} \qquad R: \begin{cases} R(d_1) = 0 \\ R(d_2) = 1 \\ R(d_3) = 1 \end{cases}$$

   c) un no modelo de F:

$$P: \begin{cases} P(d_1) = 0 \\ P(d_2) = 1 \\ P(d_3) = 1 \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} Q(d_1) = 1 \\ Q(d_2) = 1 \\ Q(d_3) = 1 \end{cases} \qquad R: \begin{cases} R(d_1) = 0 \\ R(d_2) = 1 \\ R(d_3) = 1 \end{cases}$$

4. Probar mediante reglas de inferencia que la siguiente estructura deductiva es correcta

   $P_1 = \neg \forall x\, R(x)$, $P_2 = \forall x\, (P(x) \rightarrow R(x))$, $P_3 = \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow Q = \exists x\, Q(x)$

Por implicación directa:

1. $\exists x \neg R(x)$	equivalencia en P_1.
2. $\neg R(a)$	eliminación existencial en 1.
3. $\neg P(a)$	por P_2, 2 y Modus Tollens.
4. $Q(a)$	por P_3, 3 y Silogismo disyuntivo.
5. $\exists x\, Q(x) = Q$	por 4 e Introducción de cuantificador existencial.

Otras formas:

Por implicación directa:

1. $\exists x \neg R(x)$	equivalencia en P_1.
2. $\exists x \neg P(x)$	por P_2, 1 y Modus Tollens.
3. $\exists x\, Q(x) = Q$	por P_3, 2 y Silogismo disyuntivo.

Por reducción al absurdo: $\neg Q = \neg \exists x\, Q(x)$

1. $\forall x \neg Q(x)$	equivalencia en $\neg Q$.
2. $\forall x\, P(x)$	por P_3, 1 y Silogismo disyuntivo.
3. $\forall x\, R(x)$	por P_2, 2 y Modus Ponens.
4. $\forall x\, R(x) \wedge \neg \forall x\, R(x) \equiv \perp$	por 3, P_1 y la regla $A, B \Rightarrow A \wedge B$

Problema 1 (20%):

Demostrar, mediante reglas de inferencia, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$t \to p \lor q, \quad q \lor \neg t \to r \land \neg s, \quad \neg s \to \neg (r \land w), \quad \neg w \to p \quad \Rightarrow \quad t \to (\neg r \lor p)$$

Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Entonces, incorporamos la negación de la conclusión Q = $\neg$ s al conjunto de premisas y debemos llegar a contradicción:

$P_1 = t \to p \lor q$
$P_2 = q \lor \neg t \to r \land \neg s$
$P_3 = \neg s \to \neg (r \land w)$
$P_4 = \neg w \to p$
$\neg Q = \neg (t \to (\neg r \lor p)) \equiv t \land \neg (\neg r \lor p) \equiv t \land (r \land \neg p)$

1. $t \land \neg (\neg r \lor p)$	de $\neg$ Q y la equivalencia $\neg (A \to B) \equiv A \land \neg B$
2. t	de 1 y la regla $A \land B \Rightarrow A$
3. $\neg (\neg r \lor p)$	de 1 y la regla $A \land B \Rightarrow B$
4. $r \land \neg p$	de 3 y Ley de De Morgan
5. r	de 4 y la regla $A \land B \Rightarrow A$
6. $\neg p$	de 4 y la regla $A \land B \Rightarrow B$
7. $p \lor q$	de 2, P_1 y la regla Modus Ponens
8. q	de 6, 7 y la regla Silogismo Disyuntivo
9. $q \lor \neg t$	de 8 y la regla $A \Rightarrow A \lor B$
10. $r \land \neg s$	de 9, P_2 y la regla Modus Ponens
11. $\neg s$	de 10 y la regla $A \land B \Rightarrow B$
12. $\neg (r \land w)$	de 11, P_3 y la regla Modus Ponens
13. $\neg r \lor \neg w$	de 12 y Ley de De Morgan
14. r	de 10 y la regla $A \land B \Rightarrow A$
15. $\neg w$	de 13, 14 y la regla Silogismo Disyuntivo
16. p	de 15, P_4 y la regla Modus Ponens
17. $p \land \neg p$	de 16, 6 y la regla $A, B \Rightarrow A \land B$
18. $\perp$	de 17 y la equivalencia $A \land \neg A \equiv \perp$

Por tanto, la estructura deductiva es correcta.

Problema 2 (20%):

a) Analizar la corrección de la siguiente estructura deductiva:

$P_1 = \forall x\,(E(x) \to L(x))$, $P_2 = \exists x \neg L(x)$, $P_3 = E(a) \wedge \forall x\,(A(x, a) \to L(x)) \Rightarrow Q = \exists x\,(\neg E(x) \wedge \neg A(x, a))$

Para analizar su corrección usamos el método del tableau. Si el tableau del conjunto $\{P_1, P_2, P_3, \neg Q\}$ es cerrado, la estructura deductiva es correcta.

$P_1 = \forall x\,(E(x) \to L(x))$

$\checkmark_2$ $P_2 = \exists x \neg L(x)$

$\checkmark_3$ $P_3 = E(a) \wedge \forall x\,(A(x, a) \to L(x))$

$\checkmark_1$ $\neg Q = \neg \exists x\,(\neg E(x) \wedge \neg A(x, a))$

$F_1 = \forall x \neg(\neg E(x) \wedge \neg A(x, a))$

$\neg L(b)$ — Eliminación existencial $x = b$ en P_2

$E(a)$

$F_2 = \forall x\,(A(x, a) \to L(x))$

$\checkmark_4$ $A(b, a) \to L(b)$ — Instanciando $x = b$ en F_2

$\neg A(b, a)$ | $L(b)$ +

$\checkmark_5$ $\neg(\neg E(b) \wedge \neg A(b, a))$ — Instanciando $x = b$ en F_1

$\checkmark_6$ $\neg\neg E(b)$ | $\neg\neg A(b, a)$ +

$E(b)$ — Instanciando $x = b$ en P_1

$\checkmark_7$ $E(b) \to L(b)$

$\neg E(b)$ + | $L(b)$ +

Como efectivamente el tableau es cerrado, la estructura deductiva es correcta.

b) Expresar en lenguaje natural las fórmulas

$$F_1 = E(a) \wedge \forall x\,(A(x, a) \rightarrow L(x)) \quad \text{y} \quad F_2 = \exists x\,(\neg E(x) \wedge \neg A(x, a))$$

si se considera la interpretación I siguiente:

D = {personas} a = Pedro

$E(x)$ = " x es estudiante de informática",
$L(x)$ = "a x le gusta la lógica",
$A(x, y)$ = " x es amigo de y"

F_1: Pedro es estudiante de informática y a todos los amigos de Pedro les gusta la lógica.
F_2: Hay una persona que ni estudia informática ni es amiga de Pedro.