Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** | | | |

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

11/1/2016

Tercer parcial

Instrucciones:

- En cada pregunta de test, una y sólo una de las afirmaciones a), b) y c) es cierta.
- Calificación del test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre un punto cada una.
- Calificación de los ejercicios: sobre 3 puntos cada una.
- Tiempo para esta parte del examen: **2 horas.**
- No se permite el uso de calculadoras.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en *Moodle*.

TEST

En $\mathbb{Z}_{16}$ la clase $\overline{23}$ es la misma que

a) $\overline{7}$. b) $\overline{14}$. c) $\overline{1}$.

A

Si G es un grafo regular de grado r con n vértices y q aristas, una posible terna de valores para r, n y q es

a) $r = 4$, $n = 5$, $q = 20$.
b) $r = 5$, $n = 4$, $q = 10$.
c) $r = 4$, $n = 5$, $q = 10$.

C

Sea G un grafo conexo con n vértices en el que todas las aristas son puentes. Entonces

a) G tiene un ciclo.
b) tiene $n - 1$ aristas.
c) tiene $n + 1$ aristas.

B

La relación binaria $\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$ definida sobre el conjunto $A = \{a, b, c\}$ es:

a) simétrica.
b) antisimétrica.
c) transitiva.

A

¿Cuál de los siguientes grafos es semieuleriano?

a) Q_3. b) $K_{2,3}$. c) K_3.

B

En el conjunto de claves formadas por dos dígitos, $A = \{xy \,/\, x, y \in \{0, ..., 9\}\}$, se define la relación de orden:

$$xy \; \mathcal{R} \; x'y' \iff x \leq x' \quad \text{e} \quad y \leq y'$$

Se verifica que

a) 17 y 71 no son comparables.

b) $17 \; \mathcal{R} \; 71$.

c) $71 \; \mathcal{R} \; 17$.

A

DEFINICIONES

---

1. Definir elemento maximal en un conjunto ordenado $(A, \preceq)$.

Se dice que $m \in A$ es maximal si y solo si no hay otro elemento $a \in A$ tal que $m \preceq a$ con $a \neq m$.

2. Definir grafo bipartito.

Aquel cuyo conjunto de vértices V se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos V_1, V_2, es decir, $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de modo que toda arista del grafo tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. En $\mathbb{N}^*$ se considera la relación binaria R definida como

$$a \, R \, b \;\Leftrightarrow\; \mathrm{mcd}(a, b) \neq 1$$

a) Probar que R no es transitiva.

b) Obtener el diagrama sagital de esta relación sobre el conjunto $A = \{4, 14, 10, 9, 33\}$.

Solución:

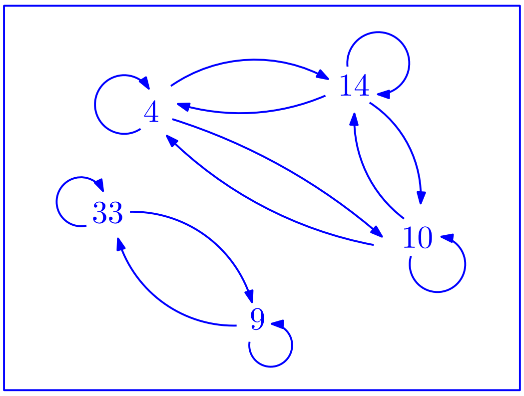
a) R no es transitiva porque $6, 15, 5 \in \mathbb{N}^*$ verifican que

$$\begin{array}{ll} 6R15 & \text{ya que } \mathrm{mcd}(6,15) = 3 \neq 1, \\ 15R5 & \text{ya que } \mathrm{mcd}(15,5) = 5 \neq 1, \text{ pero} \\ 6 \not{R} 5 & \text{ya que } \mathrm{mcd}(6,5) = 1. \end{array}$$

b) Como $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, a)$, R es simétrica, y $\mathrm{mcd}(a, a) = a \neq 1$ para todo $a \in A$.
Además,

- $4, 14, 10$ tienen a 2 como máximo divisor común de cada dos, y
- 33 y 9 tienen a 3 como máximo divisor común.

Así el diagrama sagital queda de esta manera:



Ejercicio 2. Se considera la relación de divisibilidad en el conjunto

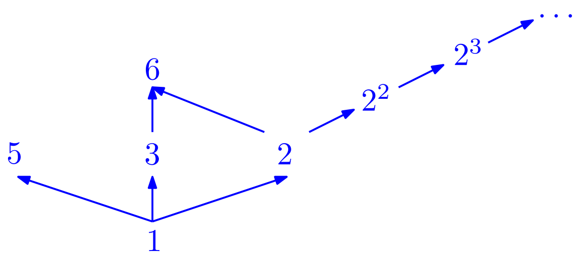
$$A = \{3, 5, 6\} \cup \{2^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$$

a) Dibujar el diagrama de Hasse de $(A, |\,)$.

b) Calcular los elementos notables.

c) Añadir a A un elemento $x \in \mathbb{N}$ tal que el nuevo conjunto tenga un único maximal.

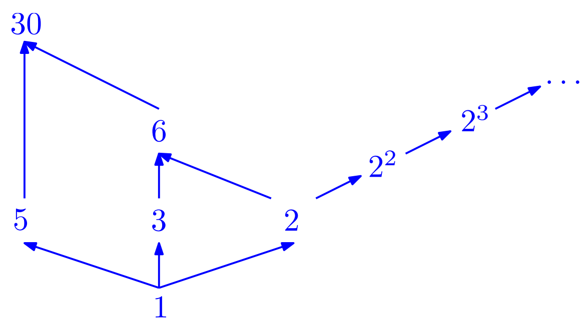
a) El diagrama de Hasse tiene una cadena infinita con las potencias de 2: $2^0 \to 2^1 \to 2^2 \to \cdots$



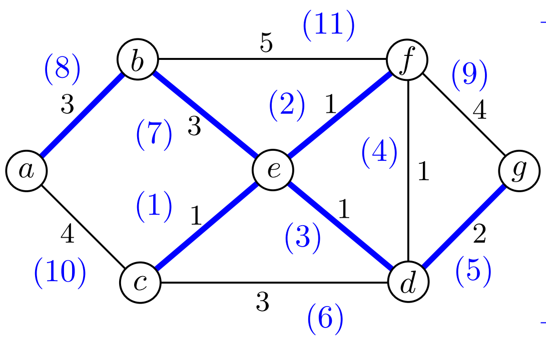
b) Maximales: 6 y 5 ya que sólo se dividen a sí mismos dentro de A. Como hay más de un maximal, no hay máximo.

Minimales: 1 y es mínimo ya que todos los elementos de A son divisibles por 1.

c) Basta tomar un múltiplo común de los dos maximales, por ejemplo $x = 30$. Así $A \cup \{30\}$ solo tiene a 30 como maximal.



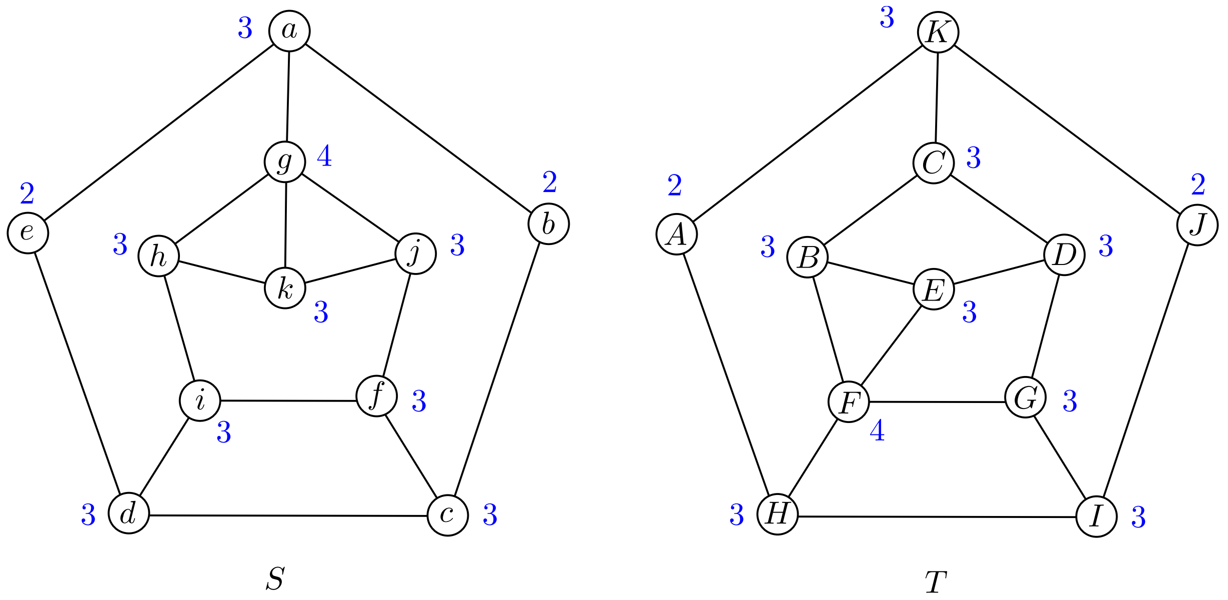
Ejercicio 3. Aplicar el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol recubridor de peso mínimo del grafo de la figura y dar su peso. Indicar brevemente los pasos seguidos.



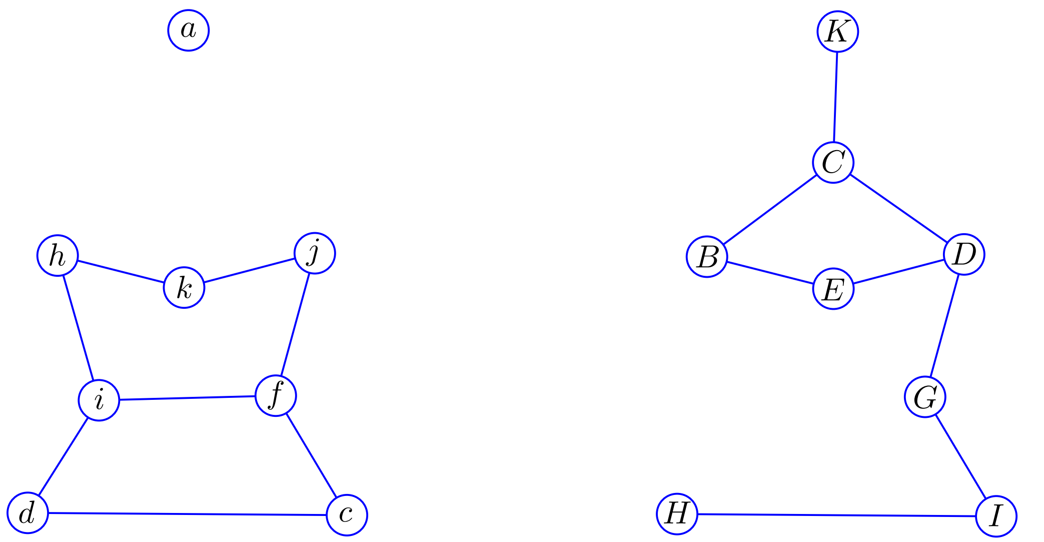
1. Ordenamos las aristas por peso en orden creciente.
2. Inicializamos el grafo de salida T como el bosque con solo los vértices del grafo.
3. Añadimos a T, una a una, las aristas de menor peso en la lista que no formen ciclo con las ya añadidas hasta tener $n - 1 = 7 - 1 = 6$ aristas.

El peso del árbol recubridor de peso mínimo es $w(T) = 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 11$.

Ejercicio 4. Estudiar si los siguientes grafos son isomorfos.



No lo son porque si lo fueran, también deberían serlo los subgrafos inducidos por los vértices de grado 3 en cada grafo:



$S_1 = \langle \text{vértices de grado } 3 \rangle_S$ $\qquad$ $T_1 = \langle \text{vértices de grado } 3 \rangle_T$

Pero no lo son porque, en particular, en S_1 hay un vértice de grado 0 y en T_1 no.

EU Informática
UPM

Notas:

- Esta parte del examen vale el 40 % de la nota total.
- Tiempo para esta parte del examen: **2 horas**.
- **Justificar todas las respuestas**.

Problema 1 (15 %)

Sea A el conjunto de las palabras con 6 caracteres en las que el primero es una de las letras del conjunto $\{a, b, c\}$ y los 5 caracteres restantes son bits:

$$A = \{x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6 \ / \ x_1 \in \{a, b, c\},\ x_i \in \{0, 1\},\ \forall i \neq 1\}$$

En A se define la relación de equivalencia R:

$$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6 \ \ R \ \ y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5\, y_6 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_1 = y_1 \\ \text{y} \\ x_5 - x_6 = y_5 - y_6 \end{array} \right.$$

a) *(2 puntos)* Probar la propiedad transitiva de esta relación.

SOLUCIÓN: Sean $x, y, z \in A$ tales que xRy e yRz ¿se verifica que xRz? Tendremos que $x = x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$, $y = y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5\, y_6$ y $z = z_1\, z_2\, z_3\, z_4\, z_5\, z_6$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como} \quad x\,R\,y \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = y_1 \\ \text{y} \\ x_5 - x_6 = y_5 - y_6 \end{array} \right. \\ \\ \text{e} \quad y\,R\,z \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_1 = z_1 \\ \text{y} \\ y_5 - y_6 = z_5 - z_6 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow \ x_1 = z_1 \\ \\ \Rightarrow \ x_5 - x_6 = z_5 - z_6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}} \right\} \Rightarrow \quad x\,R\,z$$

Por lo tanto, queda probado que R es transitiva.

b) *(2 puntos)* Describir la clase de $b\,00000$ y hallar su cardinal.

SOLUCIÓN: La clase de $b\,00000$ es:

$$\begin{aligned} \overline{b\,00000} &= \{x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6 \in A \ / \ x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6 \ R \ b\,00000\} = \\ &= \{x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6 \in A \ / \ x_1 = b,\ \ x_5 - x_6 = 0\} = \\ &= \big\{b\, x_2\, x_3\, x_4\, 00 \ / \ x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\big\} \cup \big\{b\, x_2\, x_3\, x_4\, 11 \ / \ x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\big\} \end{aligned}$$

Entonces, el cardinal de $\overline{b\,00000}$ se puede obtener, por el Principio de Adición, como la suma de los cardinales de estos dos conjuntos que son disjuntos.

El cardinal de ambos conjuntos coincide con $VR(2, 3) = 2^3$ y, por tanto, $|\overline{b\,00000}| = 2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4$.

c) *(2 puntos)* Dar un elemento del conjunto A que empiece por b y no esté en la clase de $b\,00000$. Describir su clase.

SOLUCIÓN: Por ejemplo, $b\,00010 \not R\, b00000$ pues $1-0=1\neq 0=0-0$.

$$\begin{aligned}\overline{b\,00010} &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \;R\; b\,00010\} = \\ &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1 = b,\;\; x_5 - x_6 = 1\} = \\ &= \big\{b\,x_2\,x_3\,x_4\,10 \;/\; x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}\big\}\end{aligned}$$

d) *(4 puntos)* Analizar cuántas clases diferentes hay, hallar el cardinal de cada clase y dar el conjunto cociente.

SOLUCIÓN: Es fácil ver que, $|\overline{b\,00010}| = VR(2,3) = 2^3$ y todavía empezando por b hay elementos que no están en estas dos clases, todos los que acaban en 01, pues en este caso la diferencia es -1:

$$\begin{aligned}\overline{b\,00001} &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \;R\; b\,00001\} = \\ &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1 = b,\;\; x_5 - x_6 = -1\} = \\ &= \big\{b\,x_2\,x_3\,x_4\,01 \;/\; x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}\big\}\end{aligned}$$

y de nuevo $|\overline{b\,00001}| = VR(2,3) = 2^3$.

Entonces,

$$|\overline{b\,00000}| + |\overline{b\,00001}| + |\overline{b\,00001}| = 2^4 + 2^3 + 2^3 = 2\cdot 2^3 + 2^3 + 2^3 = 4\cdot 2^3 = 2^5 < |A| = 3\cdot 2^5$$

Ya están en alguna clase todos los que empiezan por b pues los únicos valores posibles de $x_5 - x_6$ son $0, 1$ y -1 pero faltan por considerar las clases de equivalencia de los elementos de A que comienzan por a o bien por c.

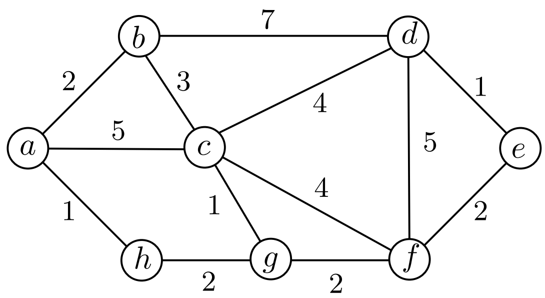
Se verifica que hay otras tres clases empezando por a y otras tres empezando por c, análogas a las anteriores. Y cada una de ellas tiene el mismo cardinal que la correspondiente que empieza por b.
Y ahora sí cada uno de los $3\cdot 2^5 = 96$ elementos de A está en alguna clase descrita y, por tanto, el conjunto cociente es:

$$\begin{aligned}A/R &\underset{\text{definición}}{=} \{\overline{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6} \;/\; x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A\} = \\ &= \big\{\overline{x_1 00000},\; \overline{x_1 00010},\; \overline{x_1 00001} \;/\; x_1 \in \{a,b,c\}\big\} = \\ &= \big\{\overline{x_1 00000} \;/\; x_1 \in \{a,b,c\}\big\} \cup \big\{\overline{x_1 00010} \;/\; x_1 \in \{a,b,c\}\big\} \cup \\ &\qquad \cup \big\{\overline{x_1 00001} \;/\; x_1 \in \{a,b,c\}\big\}\end{aligned}$$

Su cardinal es $|A/R| = 9$.

Problema 2 (25 %)

Una empresa ha puesto a la venta 8 artículos, cada uno en una página distinta de cierta tienda web. En el grafo de la figura los vértices representan las páginas de los artículos y el peso de la arista que une 2 artículos, el número de clics que hacen falta para acceder directamente del uno al otro.



	a	b	c	d	e	f	g	h
a								
b		0	3	7	8	6	4	3
c		3	0	4	5	3	1	3
d		7	4	0	1	3	5	7
e		8	5	1	0	2	4	6
f		6	3	3	2	0	2	4
g		4	1	5	4	2	0	2
h		3	3	7	6	4	2	0

a) *(2 puntos)* Los datos de la tabla representan el mínimo número de clics necesarios para pasar de un artículo a otro, pasando solo por páginas (artículos) de la empresa. ¿Cuántos clics son necesarios para pasar del artículo a a cada uno de otros artículos?

SOLUCIÓN: Si la suma de los pesos de las aristas de un camino que lleva de una página a otra representa el número de clics para pasar de una a otra siguiendo ese camino, lo que se pregunta es el mínimo número de clics necesario para ir desde el vértice a a los demás, es decir, la distancia desde a al resto.
Estas distancias desde a se hallan con el algoritmo de Dijkstra:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	2	5	∞	∞	∞	∞	1
h	–	2	5	∞	∞	∞	3	–
b	–	–	5	9	∞	∞	3	–
g	–	–	4	9	∞	5	–	–
c	–	–	–	8	∞	5	–	–
f	–	–	–	8	7	–	–	–
e	–	–	–	8	–	–	–	–
d	–	–	–	–	–	–	–	–

Luego

	a	b	c	d	e	f	g	h
$d(a,\cdot)$	0	2	4	8	7	5	3	1

b) *(2 puntos)* ¿Cuál es el número máximo de clics entre dos páginas cualesquiera de la empresa? ¿En qué par (o pares) de artículos se alcanza?

SOLUCIÓN: Yendo por el camino más corto (con el menor número de clics) de una página a otra, lo que se pide es hallar la distancia máxima entre dos vértices del grafo. Es decir, el mayor de los radios de los vértices del grafo. Para hallarlo se puede usar la tabla de distancias dada completándola con los datos obtenidos en el apartado anterior. Se trata de hallar el vértice x tal que $R(x)$ sea máximo.

$d(\cdot,\cdot)$	a	b	c	d	e	f	g	h	$R(\cdot)$
a	0	2	4	8	7	5	3	1	8
b	2	0	3	7	8	6	4	3	8
c	4	3	0	4	5	3	1	3	5
d	8	7	4	0	1	3	5	7	8
e	7	8	5	1	0	2	4	6	8
f	5	6	3	3	2	0	2	4	6
g	3	4	1	5	4	2	0	2	5
h	1	3	3	7	6	4	2	0	7

Luego la distancia máxima entre vértices es 8 y se alcanza entre los pares: a y d, b y e.

c) *(2 puntos)* En la página de uno de los artículos se quiere volcar, además, la información administrativa de la empresa de modo que desde las otras páginas se pueda acceder a ella de la forma más rápida posible (mínimo número de clics). Elegir la página más conveniente para hacerlo.

SOLUCIÓN: El lugar más conveniente será el vértice que minimice la distancia al más alejado. Así que en la tabla del apartado anterior buscamos el vértice x tal que $R(x)$ sea mínimo. Tal valor, el radio del grafo, es 5 y se alcanza en los vértices c y g. Cualquiera de ellos satisface las condiciones pedidas.

d) *(2 puntos)* Se quiere poner una página de control para actualizar los artículos alojados en e, f, g y h. ¿Dónde se debería poner si desde ésta hay que ir accediendo a cada una de las otras, de una en una y volviendo a la de control antes de acceder a la siguiente?

SOLUCIÓN: Si la página de control se ubica en el vértice x, el recorrido habitual para actualizar los artículos alojados en vértices mencionados será, por supuesto siguiendo un camino mínimo desde x a cada uno de ellos y el total de clics será

$$2(d(x,e) + d(x,f) + d(x,g) + d(x,h)) = 2S(x)$$

Por tanto el mejor lugar para ubicar la página de control es el vértice que minimice la suma anterior, o lo que es lo mismo, que minimice su mitad: $S(x)$. Para hallarlo usamos las filas correspondientes a los vértices e, f, g y h en la tabla de distancias.

$d(\cdot,\cdot)$	a	b	c	d	e	f	g	h
e	7	8	5	1	0	2	4	6
f	5	6	3	3	2	0	2	4
g	3	4	1	5	4	2	0	2
h	1	3	3	7	6	4	2	0
$S(\cdot)$	16	21	12	16	12	8	8	12

Luego los vértices ideales para ubicar la página de control son f y g.

e) *(2 puntos)* ¿Puede un cliente consultar todas las páginas de la empresa sin visitar dos veces la misma y volver a la página de inicio?

SOLUCIÓN: Sí, porque este grafo es hamiltoniano. Un ciclo hamiltoniano que permite recorrer todas las páginas y volver a la de inicio sin repetir ninguna intermedia es:

$$a, b, c, d, e, f, g, h, a$$