ETSISI
UPM

Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:** | | | |

Nombre:

Lógica y Matemática Discreta

26/6/2017

Final de julio

Instrucciones:

- En cada pregunta de test sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto; y de los ejercicios: sobre 3 puntos.
- El test se recoge a los **40 minutos**.
- Tiempo total del examen: **4 horas** (Dos horas cada parte y partes separadas por un descanso).
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico a lo largo de todo el examen.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en Moodle.
- **Justificar todas las respuestas en los 10 ejercicios y los 4 problemas**.

TEST (20 %)

La relación binaria $\mathcal{R} = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,a), (c,d)\}$ definida sobre el conjunto $A = \{a,b,c,d\}$ verifica que :

a) no es transitiva.

b) es antisimétrica.

c) es transitiva pero no simétrica ni antisimétrica.

C

La siguiente interpretación, con dominio $D = \{d_1,\ d_2\}$, y P y Q dadas por:

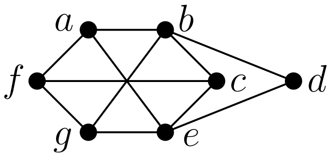
$$P: \begin{array}{ccc} D & \to & \{0,1\} \\ d_1 & \mapsto & 0 \\ d_2 & \mapsto & 1 \end{array} \qquad Q: \begin{array}{ccc} D & \to & \{0,1\} \\ d_1 & \mapsto & 1 \\ d_2 & \mapsto & 1 \end{array}$$

es modelo de la fórmula

a) $\forall x\,\big(P(x) \to Q(x)\big)$ b) $\forall x\,\big(Q(x) \to P(x)\big)$ c) $\forall x\,\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$

A

El siguiente grafo



a) No es bipartito.

b) Es bipartito y una partición de vértices es $V_1 = \{a,c,d,g\}$ y $V_2 = \{b,e,f\}$.

c) Es bipartito y una partición de vértices es $V_1 = \{a,g,d\}$ y $V_2 = \{b,e,f\}$.

B

La fórmula $p \wedge q \to r$ es equivalente a

a) $(p \to r) \vee (q \to r)$ b) $(p \to r) \wedge (q \to r)$ c) $\neg r \to \neg p \wedge \neg q$

A

La correspondencia recursiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{0,1\} \\ f(n-2)+3 & \text{si } n \text{ es par} \\ f(n+2) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

verifica que

a) f es función y $f(4) = 7$.

b) f no es función y $f(4) = 5$.

c) f no es función y $f(4) = 7$.

C

Se considera el conjunto de claves formadas por dos letras distintas, de las 27 del castellano, seguidas de dos dígitos, del 0 al 9. El número de claves que empiezan por vocal es

a) $V(27,2) \cdot VR(10,2)$ b) $\binom{5}{1} \cdot \binom{26}{1} \cdot VR(10,2)$ c) $\binom{5}{1} \cdot \binom{26}{1} \cdot V(10,2)$

B

Si se ponderan todas las aristas del grafo $K_{2,3}$ con peso 1, se verifica que:

a) tiene 5 centros y 2 medianas.

b) tiene 5 centros y 3 medianas.

c) tiene 2 centros y 5 medianas.

A

Dada la fórmula $\neg(p \vee \top) \to q$, una subfórmula suya es

a) $\neg p$ b) $\neg p \wedge \neg\top$ c) $p \vee \top$

C

La función $f : \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0,1\}$ definida por

$$f(L) = \begin{cases} 1 & \text{si } L = [\,] \\ 0 & \text{si } \mathrm{LONG}(L) = 1 \\ f(\mathrm{RESTO}(\mathrm{RESTO}(L))) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

tiene como conjunto de partida

a) $\{[\,]\}$.

b) $\{[\,]\} \cup \{\text{listas de longitud } 1\}$.

c) $\{0,1\}$.

B

Sea G un grafo regular de 7 vértices y 70 aristas. Se puede asegurar que

a) el grado de cada vértice es 10.

b) el grado de cada vértice es 20.

c) tal grafo no puede existir.

C

Apellidos:

Nombre: **Iniciales 1^{er} apellido:** | | | |

Lógica y Matemática Discreta Final de julio 26/6/2017

DEFINICIONES (10 %)

1. Definir contraejemplo de una estructura deductiva.

Es un modelo común de las premisas que es no modelo de la conclusión. Es decir, es una valoración (o interpretación) tal que hace que el valor veritativo de las premisas sea 1 y el de la conclusión 0.

2. Definir regla recursiva de una función recursiva $f : A \longrightarrow B$.

Es aquella que define el valor de la imagen de un elemento de A en términos de la imagen de otros elementos de A.

3. Definir circuito euleriano en un grafo G.

Es aquel que pasa por todas las aristas del grafo una sola vez.

4. Enunciar la fórmula del binomio de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

5. Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, definir clase de equivalencia de $a \in A$.

Es el conjunto de elementos de A que están relacionados con a. Es decir,

$$[a] = \{x \in A \,/\, xRa\}$$

EJERCICIOS (30 %, hay 10)

Ejercicio 1. Demostrar, mediante reglas de inferencia, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$p \wedge \neg q \to r \vee t, \;\; \neg t, \;\; r \to t \quad \Rightarrow \quad p \to q$$

SOLUCIÓN:

OPCIÓN 1: Por derivación

- $\neg t, \; r \to t \quad \Rightarrow \quad \neg r$ por Modus Tollens.
- $\neg r, \; \neg t \quad \Rightarrow \quad \neg r \wedge \neg t$ por Simplificación.
- $\neg r \wedge \neg t \; \equiv \; \neg(r \vee t)$ por Leyes de De Morgan.
- $\neg(r \vee t), \; p \wedge \neg q \to r \vee t \quad \Rightarrow \quad \neg(p \wedge \neg q)$ por Modus Tollens.
- $\neg(p \wedge \neg q) \; \equiv \; \neg p \vee q$ por Leyes de De Morgan y doble negación.
- $\neg p \vee q \; \equiv \; \mathbf{p} \to \mathbf{q}$ por relación de conectivos.

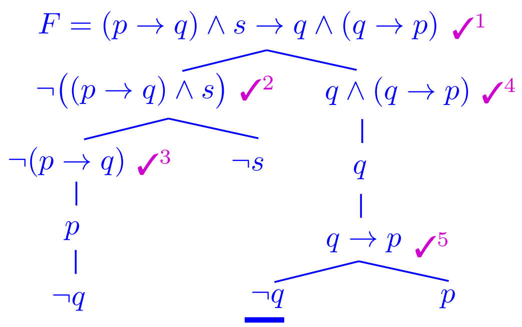
OPCIÓN 2: Por reducción al absurdo.

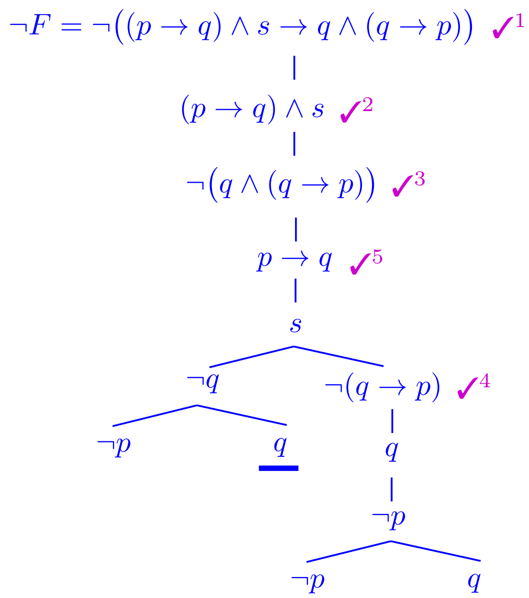
- $\neg Q = \neg(p \to q)$ de suponer como cierta la negación de la conclusión.
- $\neg(p \to q) \; \equiv \; p \wedge \neg q$ por negación del condicional.
- $p \wedge \neg q, \; p \wedge \neg q \to r \vee t \quad \Rightarrow \quad r \vee t$ por Modus Ponens.
- $r \vee t, \; \neg t \quad \Rightarrow \quad r$ por Silogismo Disyuntivo.
- $r \to t, \; r \quad \Rightarrow \quad t$ por Modus Ponens.
- $\neg t, \; t \quad \Rightarrow \quad \neg t \wedge t \; \equiv \; \perp$ por Simplificación y Ley del complementario.

Ejercicio 2. Usar el método del tableau para clasificar F (tautología, contradicción o contingente). Dar, si existen, un modelo y un no modelo.

$F = (p \to q) \wedge s \to q \wedge (q \to p)$

SOLUCIÓN:





Obtenemos un modelo de la primera rama abierta del tableau de F:

$$V(p) = 1, \; V(q) = 0, \; V(s) = 1 \,(\text{ó } 0)$$

Obtenemos un no modelo de la primera rama abierta del tableau de $\neg F$:

$$V(p) = 0, \; V(q) = 0, \; V(s) = 1$$

Como el tableau de F y el de $\neg F$ son abiertos, F admite tanto modelos como no modelos y por tanto es contingente.

Ejercicio 3. Formalizar el siguiente razonamiento, en lógica de predicados con el dominio $D = \{$ personas $\}$ y especificando el significado de los predicados usados.

Todos los rubios son estudiantes. Pedro es rubio y tiene un admirador que no es rubio. Todos los admiradores de Pedro son rubios o no son estudiantes. Por lo tanto, hay algún admirador de Pedro que es estudiante.

Solución:

$$\begin{aligned} R(x) &= x \text{ es rubio.} \\ E(x) &= x \text{ es estudiante.} \\ A(x,y) &= x \text{ admira a } y. \\ a &= \text{Pedro.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \cdot & \forall x\big(R(x) \to E(x)\big) \\ \cdot & R(a) \wedge \exists x\big(A(x,a) \wedge \neg R(x)\big) \\ \cdot & \forall x\big(A(x,a) \to R(x) \vee \neg E(x)\big) \\ \hline \therefore & \exists x\big(A(x,a) \wedge E(x)\big) \end{array}$$

Ejercicio 4. Se considera la relación de divisibilidad en $A = \{3, 4, 6, 15, 60, 90\}$

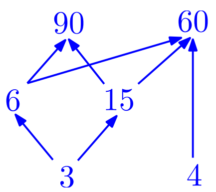
$$a \mid b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \,/\, b = a \cdot k$$

a) *(2 puntos)* Dibujar el diagrama de Hasse de $(A, |\,)$ y calcular los elementos notables.

b) *(1 punto)* Añadir a A un elemento $x \in \mathbb{N}$ tal que el nuevo conjunto tenga un único maximal.

Solución: Usando $\begin{aligned} 90 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 2 \\ 60 &= 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \end{aligned}$ se puede observar la relación de divisibilidad entre los elementos de A y se tiene lo siguiente.

a) El diagrama de Hasse de $(A, |\,)$ es:



y

Maximales: 90 y 60 porque no hay en A elementos mayores que (múltiplos de) ellos.

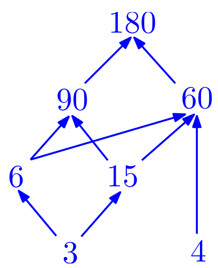
Minimales: 3 y 4 porque no hay en A elementos menores que (divisores de) ellos.

Máximo: no hay porque hay más de un maximal.

Mínimo: no hay porque hay más de un minimal.

b) Basta añadir a A un número que sea mayor (múltiplo) de sus dos maximales. Cualquier múltiplo de $\text{mcm}(90, 60) = 180$ valdrá. Por ejemplo, 180.

Si $A' = A \cup \{180\}$, se tiene que $(A', |\,)$ tiene máximo: 180, y por tanto un único maximal.



Ejercicio 5. Probar por inducción que $f(n) = g(n)$ para todo natural $n \geq 0$ siendo

$$f(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \quad (RB1) \\ 5 & \text{si } n = 1 \quad (RB2) \\ 4f(n-1) - 3f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \quad (RR) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(n) = 2 + 3^n$$

Solución:

Paso base: Para $n = 0$: $g(0) = 2 + 3^0 = 2 + 1 = 3 \overset{RB1}{=} f(0)$

Para $n = 1$: $g(1) = 2 + 3^1 = 2 + 3 = 5 \overset{RB2}{=} f(1)$

Paso inductivo: Supongamos la igualdad cierta para $n \geq 0$ y para $n+1$ (H.I.), es decir, suponemos cierto que $f(n) = g(n)$ y $f(n+1) = g(n+1)$.

Entonces para $n + 2$:

$$\begin{aligned} f(n+2) &\underset{(n+2\geq 2)}{\overset{RR}{=}} 4f(n+1) - 3f(n) \overset{HI}{=} 4g(n+1) - 3g(n) = 4(2+3^{n+1}) - 3(2+3^n) = \\ &= 8 - 6 + 4\cdot 3^{n+1} - 3^{n+1} = 2 + 3\cdot 3^{n+1} = 2 + 3^{n+2} = \\ &= g(n+2) \end{aligned}$$

Luego es cierto para $n + 2$.

En consecuencia, por el principio de inducción, la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6. Sea A el conjunto de los números naturales de 4 cifras significativas.

a) *(1 punto)* ¿Cuántos de los números de A son múltiplos de 5?

b) *(2 puntos)* ¿Cuántos de los números de A son múltiplos de 2 ó múltiplos de 5?

Solución: Usando el principio de multiplicación.

a) Un número de cuatro cifras es una secuencia ordenada de cifras tomadas del 0 a 9 de modo que la primera cifra no es 0. Si además se quiere que sea múltiplo de 5, su última cifra será 0 o 5.

Luego hay 9 posibilidades para elegir la primera cifra, 10 para elegir la segunda y la tercera cifras y 2 para elegir la cuarta. Por tanto hay $9 \cdot 10^2 \cdot 2 = 1800$ números de A múltiplos de 5.

b) Los múltiplos de 2 son los acabados en $0, 2, 4, 6$ u 8. Luego hay $9 \cdot 10^2 \cdot 5 = 4500$. Los múltiplos de 5 hemos visto que eran 1800. Y los múltiplos de 2 y 5, es decir los múltiplos de 10, son los que acaban en 0, luego hay $9 \cdot 10^2 \cdot 1 = 900$.

Por el principio de inclusión-exclusión, los múltiplos de 2 o de 5 son:

$$4500 + 1800 - 900 = 5400$$

Ejercicio 7. En el conjunto de las palabras de tres bits $A = \{a_1a_2a_3 \,/\, a_i \in \{0,1\}\}$ se define la siguiente relación de equivalencia R:

$$a_1a_2a_3 \, R \, b_1b_2b_3 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \qquad \text{(suma en } \mathbb{N}\text{)}$$

Hallar el número de clases de equivalencia que hay, hallar el conjunto cociente A/R y dar el cardinal de cada clase de equivalencia.

Solución: De la definición de R se deduce que dos palabras de tres bits son equivalentes si y solo si tienen el mismo número de unos. Las palabras, por tanto, se clasifican según el número de unos que tengan y habrá tantas clases de equivalencia distintas como distintas cantidades de unos puedan tener que son $0, 1, 2$ y 3. Luego habrá 4 clases de equivalencia.

El conjunto cociente será: $A/R = \{[000], [100], [110], [111]\}$.

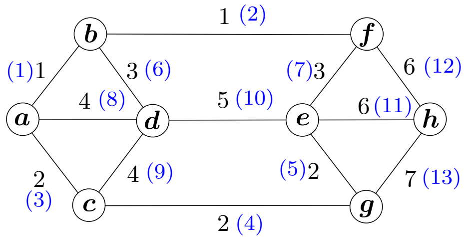
- Nº de palabras de 3 bits sin unos: $\binom{3}{0} = 1$ luego $|[000]| = 1$.
- Nº de palabras de 3 bits con exactamente un uno: $\binom{3}{1} = 3$ luego $|[100]| = 3$.
- Nº de palabras de 3 bits con exactamente dos unos: $\binom{3}{2} = 3$ luego $|[110]| = 3$.
- Nº de palabras de 3 bits con exactamente tres unos: $\binom{3}{3} = 1$ luego $|[111]| = 1$.

(Obs.: El número combinatorio viene de elegir las posiciones donde colocar los unos)

Ejercicio 8. Se considera el grafo de la figura de abajo.

a) *(2 puntos)* Dar la sucesión de aristas que se añaden al árbol generador mínimo cuando se aplica el algoritmo de Kruskal. Si hay más de una solución, dar solo una de ellas.

b) *(1 punto)* Dar el árbol generador mínimo si las aristas ad y eh han de estar en dicho árbol.



Solución:

a) El algoritmo de Kruskal primero ordena las aristas del grafo según su peso en orden creciente y luego, partiendo del conjunto vacío de aristas, se van seleccionando las aristas de menor peso de modo que no formen ciclos con las ya seleccionadas previamente. Esto se itera hasta seleccionar un total de $n - 1 = \text{nº de vértices } -1 = 7$ aristas.

En la figura de arriba, se indica una posible ordenación de las aristas (entre paréntesis). Continuando el algoritmo sobre esa ordenación se tiene la sucesión de aristas: ab, bf, ac, cg, eg, ad, eh que son las del árbol generador de peso mínimo de la figura *Fig. a*.

b) Hacemos lo mismo pero partiendo, no del conjunto vacío de aristas, sino del conjunto formado por las dos aristas impuestas. Quedaría el árbol generador de peso mínimo sujeto a las restricciones dadas que aparece en la figura *Fig. b*.

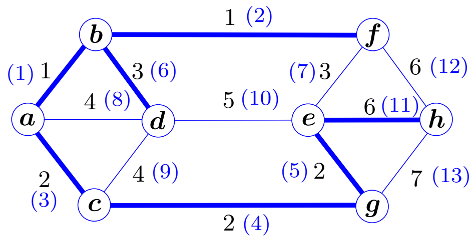


Fig. a

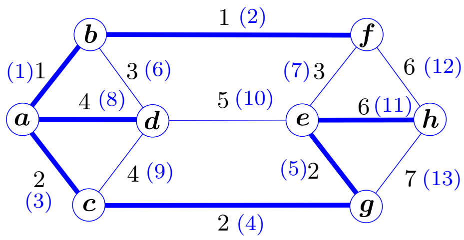
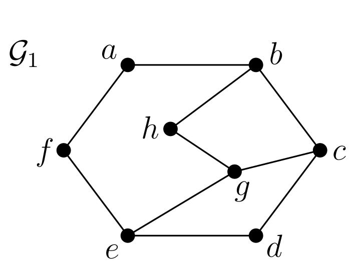
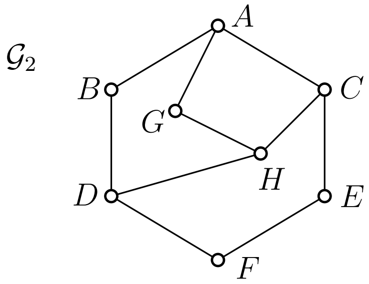


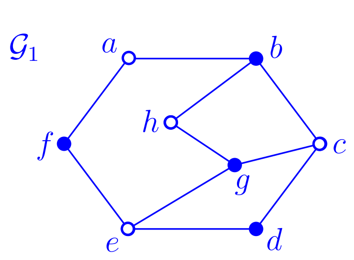
Fig. b

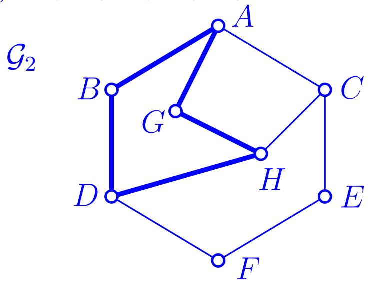
Ejercicio 9. Estudiar si los grafos de la figura son isomorfos.





Solución: No son isomorfos porque uno de ellos es bipartito y el otro no.
En efecto, $\mathcal{G}_1$ es bipartito como se puede comprobar en la siguiente figura pero $\mathcal{G}_2$ no es bipartito porque tiene un ciclo de longitud 5 (impar): A, B, D, H, G, A.





Ejercicio 10. Sea $f : \mathrm{LIST}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0,1\}$ la función booleana definida recursivamente por:

$$f(L) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{LONG}(L) = 0 \\ 1 & \text{si } \mathrm{LISTA}\big(\mathrm{CAB}(L)\big) = 0 \text{ y } \mathrm{CAB}(L) \text{ es impar.} \\ f\big(\mathrm{RESTO}(L)\big) & \text{si } \mathrm{LISTA}\big(\mathrm{CAB}(L)\big) = 0 \text{ y } \mathrm{CAB}(L) \text{ es par.} \\ \text{máx}\Big\{f\big(\mathrm{CAB}(L)\big),\ f\big(\mathrm{RESTO}(L)\big)\Big\} & \text{si } \mathrm{LISTA}\big(\mathrm{CAB}(L)\big) = 1 \end{cases}$$

a) *(2 puntos)* Evaluar $f\Big(\big[8, [[3,5],4], 7\big]\Big)$ detalladamente siguiendo el esquema recursivo y hallar el árbol de dependencia $T_f\Big(\big[8, [[3,5],4], 7\big]\Big)$.

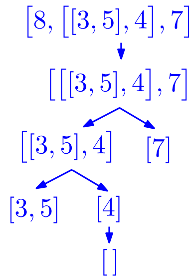
b) *(1 punto)* Describir lo que hace f sobre listas cualesquiera.

Solución:

a) La función tiene dos reglas básicas y dos recursivas numeradas en el orden en que aparecen: $RB1$, $RB2$, $RR1$, $RR2$.

$$\begin{aligned}
f\Big(\big[8, [[3,5],4], 7\big]\Big) &\overset{RR1}{=} f\Big(\big[[[3,5],4], 7\big]\Big) = 1 \\
f\Big(\big[[[3,5],4], 7\big]\Big) &\overset{RR2}{=} \text{máx}\Big\{f\big([[3,5],4]\big),\ f\big([7]\big)\Big\} = \text{máx}\{1,1\} = 1 \\
f\big([[3,5],4]\big) &\overset{RR2}{=} \text{máx}\Big\{f\big([3,5]\big),\ f\big([4]\big)\Big\} = \text{máx}\{1,0\} = 1 \\
f\big([3,5]\big) &\overset{RB2}{=} 1 \\
f\big([4]\big) &\overset{RR1}{=} f\big([\,]\big) = 0 \\
f\big([7]\big) &\overset{RB2}{=} 1 \\
f\big([\,]\big) &\overset{RB1}{=} 0
\end{aligned}$$

$T_f\big([8, [[3,5],4], 7]\big) =$



b) La función detecta la presencia de números impares en una lista.

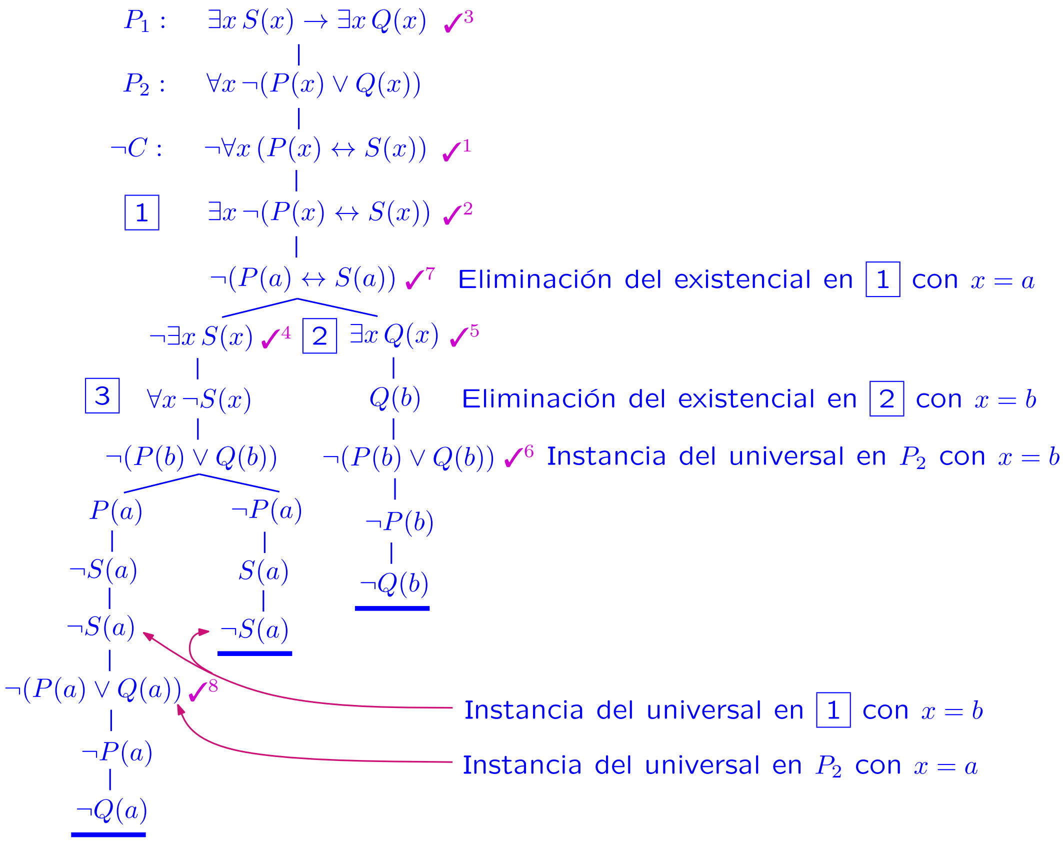
$$f(L) = \begin{cases} 1 & \text{si } L \text{ contiene algún número impar} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Problema 1 (12 %)

a) *(8 puntos)* Usar el método del tableau para probar que la siguiente estructura deductiva es correcta.

$$\exists x\, S(x) \to \exists x\, Q(x),\ \ \forall x\, \neg(P(x) \vee Q(x)) \quad \Rightarrow \quad \forall x\, (P(x) \leftrightarrow S(x))$$

Solución: Un tableau de las premisas P_1, P_2 y la negación de la conclusión C es:



Como tableau$(P_1, P_2, \neg C)$ es cerrado, la estructura deductiva $P_1, P_2 \Rightarrow C$ es correcta.

b) *(2 puntos)* Probar, sin tableaux, que el siguiente conjunto de fórmulas es insatisfactible

$$\{P_1,\ \ P_2,\ \ \exists x\, (P(x) \wedge \neg S(x))\}$$

donde P_1 y P_2 son las premisas de la estructura deductiva del apartado anterior.

Solución: De **a)** sabemos que el conjunto $\{P_1, P_2, \neg C\}$ es insatisfactible pues su tableau es cerrado. Intentamos relacionar $\neg C$ con la fórmula $F = \exists x\, (P(x) \wedge \neg S(x))$ dada.

$$\begin{aligned}
\neg C &\equiv \neg\forall x\, (P(x) \leftrightarrow S(x)) \equiv \exists x\, \neg(P(x) \leftrightarrow S(x)) \\
&\equiv \exists x\, \big((P(x) \wedge \neg S(x)) \vee (\neg P(x) \wedge S(x))\big) \\
&\equiv \exists x\, (P(x) \wedge \neg S(x)) \vee \exists x\, (\neg P(x) \wedge S(x)) \\
&\equiv F \vee \exists x\, (\neg P(x) \wedge S(x))
\end{aligned}$$

Si el conjunto dado $\{P_1, P_2, F\}$ fuera satisfactible tendría un modelo. Es decir, habría una interpretación I tal que $V_I(P_1) = V_I(P_2) = V_I(F) = 1$.

Pero si $V_I(F) = 1$ entonces $V_I\big(F \vee \exists x\, (\neg P(x) \wedge S(x))\big) = 1$ y por tanto $V_I(\neg C) = 1$. Entonces I sería también un modelo del conjunto $\{P_1, P_2, \neg C\}$, pero es imposible porque es insatisfactible.

Conclusión: el conjunto dado es insatisfactible.

Problema 2 (10 %)

a) *(4 puntos)* Definir una función recursiva $f : \mathbb{N} \times \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N})$ tal que $f(n, L)$ sea la lista con los n primeros elementos de L, o bien, sea L si $n \geq \mathrm{LONG}(L)$.
Por ejemplo, $f(2, [3, 6, 5]) = [3, 6]$ y $f(3, [4, 1]) = [4, 1]$.

SOLUCIÓN: Busquemos la regla recursiva. Si $L = [a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m]$ entonces

$$f(n, L) = [a_1, \ldots, a_n] = [a_1] \parallel \underbrace{[a_2, \ldots, a_n]}_{f(n-1,\mathrm{RESTO}(L))} = \big[\,\mathrm{CAB}(L)\big] \parallel f(n-1, \mathrm{RESTO}(L))$$

Como la recursividad se hace en las dos variables harán falta reglas básicas para cada una de ellas. En n se disminuye en una unidad luego bastará con una regla básica en $n = 0$ y en L la longitud disminuye en una unidad, luego bastará con una regla en la lista de menor longitud: $[\,]$.

$$f(n, L) = \begin{cases} [\,] & \text{si } n = 0 \qquad (RB1) \\ [\,] & \text{si } L = [\,] \qquad (RB2) \\ \big[\,\mathrm{CAB}(L)\big] \parallel f(n-1, \mathrm{RESTO}(L)) & \text{en otro caso.} \quad (RR) \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Evaluar detalladamente $f(2, [3, 6, 5])$ y $f(3, [4, 1])$ siguiendo el esquema recursivo propuesto.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} f(2, [3, 6, 5]) &\overset{RR}{=} [3] \| f(1, [6, 5]) \\ f(1, [6, 5]) &\overset{RR}{=} [6] \| f(0, [5]) \\ f(0, [5]) &\overset{RB1}{=} [\,] \\ f(1, [6, 5]) &= [6] \| [\,] = [6] \\ f(2, [3, 6, 5]) &= [3] \| [6] = [3, 6] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3, [4, 1]) &\overset{RR}{=} [4] \| f(2, [1]) \\ f(2, [1]) &\overset{RR}{=} [1] \| f(1, [\,]) \\ f(1, [\,]) &\overset{RB2}{=} [\,] \\ f(2, [1]) &= [1] \| [\,] = [1] \\ f(3, [4, 1]) &= [4] \| [1] = [4, 1] \end{aligned}$$

c) *(2 puntos)* Dar el conjunto de partida de f.

SOLUCIÓN: $A_0 = \{(0, L) \,/\, L \in \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N})\} \cup \{(n, [\,]) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$

d) *(3 puntos)* Definir otra función recursiva $g : \mathbb{N} \times \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N})$ tal que $g(n, L)$ sea la lista resultante de eliminar de L los n primeros elementos, o bien, sea $[\,]$ si $n \geq \mathrm{LONG}(L)$.
Por ejemplo, $g(2, [3, 6, 5]) = [5]$ y $g(3, [4, 1]) = [\,]$.

SOLUCIÓN: Si $L = [a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m]$ entonces

$$\begin{aligned} g(n, L) &= g(n, [\overbrace{a_1, \underbrace{a_2, \ldots, a_n}_{n-1}}^{n}, a_{n+1}, \ldots, a_m]) = [a_{n+1}, \ldots, a_m] \\ &= g(n-1, \mathrm{RESTO}(L)) \end{aligned}$$

Igual que en el primer apartado harán falta una regla básica sobre n y otra sobre L.

$$g(n, L) = \begin{cases} L & \text{si } n = 0 \qquad (RB1) \\ [\,] & \text{si } L = [\,] \qquad (RB2) \\ g(n-1, \mathrm{RESTO}(L)) & \text{en otro caso.} \quad (RR) \end{cases}$$

Problema 3 (8 %)

Nos han encargado hacer un estudio de las redes wifi que tienen los distintos establecimientos en un área comercial. Una de las pruebas es hacer un test de velocidad y vemos que encontramos 12 redes distintas accesibles.

a) *(4 puntos)* ¿De cuántas formas podemos hacer el test en todas las redes si tenemos que ir conectándonos secuencialmente una a una?

SOLUCIÓN: Cada forma de hacer el test se distingue de otra en el orden en que se tratan las 12 redes. Luego hay

$$P(12) = 12! \text{ formas.}$$

b) *(3 puntos)* Hemos visto que las 12 redes son de proveedores distintos: 4 del proveedor PA, 3 del PB, 2 del PC, 2 del PD y 1 del PE. Teniendo en cuenta el proveedor, en lugar del nombre de la red, ¿de cuántas formas podemos hacer el estudio?

SOLUCIÓN: Cada forma es una permutación en la que hay elementos (redes) indistinguibles si pertenecen al mismo proveedor. Luego hay

$$PR(12; 4, 3, 2, 2, 1) = \frac{12!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} \text{ formas.}$$

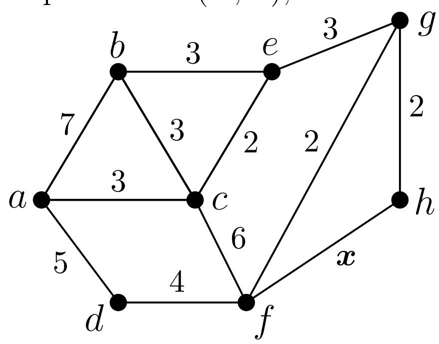
c) *(3 puntos)* De los seis miembros que forman nuestro equipo se quiere seleccionar un grupo de trabajo con al menos 4 miembros de modo que compartan datos para poder seguir con otro estudio (la empresa no pone objeciones al número de personas que comparten datos). ¿De cuantas formas podemos elegir el grupo de trabajo?

SOLUCIÓN: Hay que elegir un grupo de 4 o 5 o 6 personas de forma no ordenada tomadas de entre los 6 miembros del equipo. Luego hay

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} + 6 + 1 = \frac{6 \cdot 5}{2!} + 6 + 1 = 15 + 6 + 1 = 22 \text{ formas.}$$

Problema 4 (10 %)

Se considera el siguiente grafo ponderado (G, w),



a) *(4 puntos)* Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar todos los valores de x como peso de la arista fh de manera que el único camino mínimo entre a y h sea $acegh$. Razonar con detalle la obtención de esos valores.

SOLUCIÓN: La ejecución del algoritmo de Dijkstra se resume en la siguiente tabla:

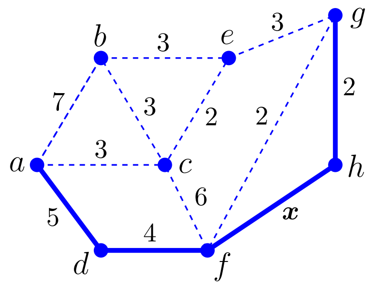
	a	b	c	d	e	f	g	h	Camino
a	0	7	3	5	∞	∞	∞	∞	a
c	–	6	–	5	5	9	∞	∞	a, c
d	–	6	–	–	5	9^*	∞	∞	a, d
e	–	6	–	–	–	9	8	∞	a, c, e
b	–	–	–	–	–	9	8	∞	a, c, b
g	–	–	–	–	–	9	–	10	a, c, e, g
f	–	–	–	–	–	–	–	$\min(10, 9 + x)$	$a, c, f \| a, d, f$
h	–	–	–	–	–	–	–	–	C

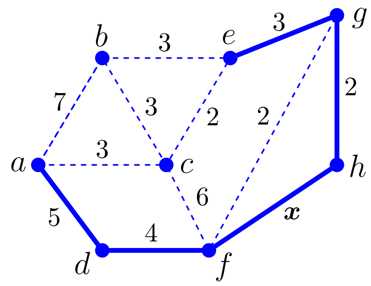
- Si $9 + x < 10$ entonces $\min(10, 9 + x) = 9 + x$ y un camino mínimo de a a h pasaría por f. (C sería a, c, f, h o a, d, f, h).
- Si $9 + x = 10$ entonces habría más de un camino mínimo de a a h: pasando por f o pasando por g. (C sería a, c, f, h, a, d, f, h o a, c, e, g, h).
- Si $9 + x > 10$ entonces sólo habría un camino mínimo de a a h: el que pasa por g: a, c, e, g, h. Este es el caso que nos interesa.

Luego $x \geq 2$.

b) *(2'5 puntos)* Justificar que hay exactamente dos ciclos hamiltonianos e indicar el de peso mínimo.

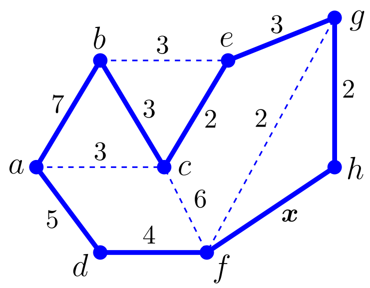
SOLUCIÓN: En un ciclo hamiltoniano estarán todos los vértices de G y algunas de sus aristas. En particular seguro que están las aristas incidentes en vértices de grado 2. Así pues, el siguiente grafo es un subgrafo de cualquier ciclo hamiltoniano de G:

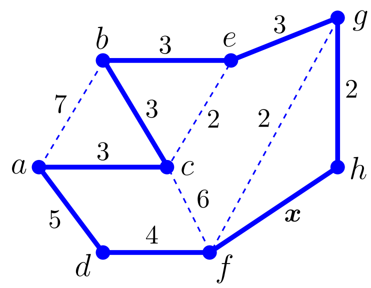




También debe estar necesariamente la arista ge porque es la única forma de prolongar el ciclo desde g.

Y sólo hay dos formas de conectar a y e pasando por el resto de los vértices que aún quedan por conectar: añadiendo las aristas ab, bc, ce o bien añadiendo las aristas ac, cb, be.





Por tanto sólo hay dos ciclos hamiltonianos y el de menor peso es aquel en el que la suma de estas últimas tres aristas añadidas es menor. En la primera opción

$$w(ab) + w(bc) + w(ce) = 12,$$

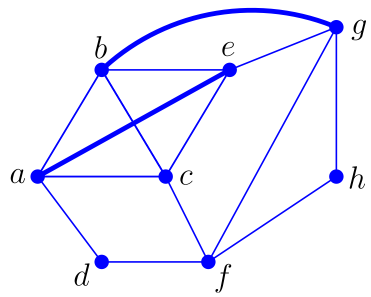
y en la segunda

$$w(ac) + w(cb) + w(be) = 9.$$

Luego el ciclo hamiltoniano de peso mínimo es el segundo.

c) *(2'5 puntos)* Estudiar si G es euleriano o semieuleriano. En caso de no ser euleriano, añadir el mínimo número de aristas para tener un grafo euleriano (no multigrafo). ¿Hay más de una posibilidad? Razonar la respuesta.

SOLUCIÓN: El grafo no es euleriano porque tiene vértices de grado impar ($g(a) = 3$). No es semieuleriano porque hay más de dos vértices de grado impar. Concretamente hay 4 vértices de grado impar: a, b, e, g.
Si se añaden dos aristas conectando vértices de grado impar que no sean adyacentes en G se obtiene un grafo (no multigrafo) con todos los vértices de grado par y como el grafo es conexo, es euleriano. En este caso solo hay una forma de hacerlo: añadiendo ae y bg.

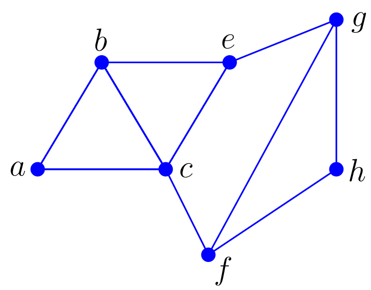


d) *(1 punto)* Hallar el subgrafo inducido por los vértices que pertenezcan a algún triángulo (ciclo de longitud 3) en G.

SOLUCIÓN: Teniendo en cuenta que

$$\langle \text{ vértices que están en un triángulo } \rangle_G = G - \{ \text{ vértices que no están en un triángulo } \}$$

y que el único vértice que no pertenece a un triángulo en G es d, el subgrafo inducido es



Anexo

SOLUCIÓN ALTERNATIVA AL EJERCICIO 6:

Sean $B_1 = \{x \in A \,/\, 5|x\}$ y $B_2 = \{x \in A \,/\, 2|x\}$.

a) Observemos que $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1000 \leq x \leq 9999\}$. Por tanto, $|A| = 9999-1000+1 = 9000$. Teniendo en cuenta que cada 5 consecutivos hay un múltiplo de 5 y que el primero de A es un múltiplo de 5 y el último es justo el anterior a un múltiplo de 5, en A la quinta parte de sus elementos son múltiplos de 5: $|B_1| = \frac{9000}{5} = 1800$

b) Razonando análogamente al apartado anterior, se tiene que $|B_2| = \frac{9000}{2}$ y $|B_1 \cap B_2| = \frac{9000}{10}$. Luego por el principio de inclusión-exclusión, los múltiplos de 2 o de 5 son:

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2| = \frac{9000}{5} + \frac{9000}{2} - \frac{9000}{10} = 4500 + 1800 - 900 = 5400$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA AL APARTADO b) DEL PROBLEMA 1:

El conjunto $\{P_1,\, P_2,\, F\}$ es insatisfactible porque $P_1,\, P_2,\, F \;\Rightarrow\; \perp$ es correcta. Veámoslo.

a) $F = \exists x \left(P(x) \wedge \neg S(x)\right) \;\Rightarrow\; P(a) \wedge \neg S(a)$ por eliminación del existencial con $x = a$.

b) $P(a) \wedge \neg S(a) \;\Rightarrow\; P(a)$ por simplificación.

c) $P_2 = \forall x \,\neg\big(P(x) \vee Q(x)\big) \;\equiv\; \forall x \big(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)\big) \;\equiv\; \big(\forall x \,\neg P(x)\big) \wedge \big(\forall x \,\neg Q(x)\big)$

d) $\big(\forall x \,\neg P(x)\big) \wedge \big(\forall x \,\neg Q(x)\big) \;\Rightarrow\; \forall x \neg P(x)$ por simplificación.

e) $\forall x \,\neg P(x) \;\Rightarrow\; \neg P(a)$ por instanciación del universal.

f) $P(a),\, \neg P(a) \;\Rightarrow\; P(a) \wedge \neg P(a) \;\equiv\; \perp$ por simplificación y ley del complementario.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA AL PROBLEMA 2:

a) La misma regla recursiva pero con distintas reglas básicas:

$$f(n,L) = \begin{cases} L & \text{si } n \geq \mathrm{LONG}(L) \qquad (RB1) \\ [\,] & \text{si } n = 0 \qquad (RB2) \\ \big[\,\mathrm{CAB}(L)\big] \,\|\, f(n-1, \mathrm{RESTO}(L)) & \text{en otro caso.} \quad (RR) \end{cases}$$

b) La evaluación con el nuevo esquema recursivo:

$$\begin{aligned} f(2,[3,6,5]) &\overset{RR}{=} [3] \| f(1,[6,5]) \\ f(1,[6,5]) &\overset{RR}{=} [6] \| f(0,[5]) \\ f(0,[5]) &\overset{RB2}{=} [\,] \\ f(1,[6,5]) &= [6] \| [\,] = [6] \\ f(2,[3,6,5]) &= [3] \| [6] = [3,6] \end{aligned} \qquad f(3,[4,1]) \overset{RB1}{=} [4,1]$$

c) $A_0 = \{(0,L) \,/\, L \in \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N})\} \cup \{(n,L) \,/\, n \in \mathbb{N},\ L \in \mathrm{LIST}_P(\mathbb{N}) \text{ con } n \geq \mathrm{LONG}(L)\}$

d) De nuevo, la misma regla recursiva pero se cambian las reglas básicas.

$$g(n,L) = \begin{cases} [\,] & \text{si } n \geq \mathrm{LONG}(L) \qquad (RB1) \\ L & \text{si } n = 0 \qquad (RB2) \\ g(n-1, \mathrm{RESTO}(L)) & \text{en otro caso.} \quad (RR) \end{cases}$$