LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. Segundo parcial **29/11/2016**

Apellidos y Nombre:...

Indicaciones: **Tres primeras letras del primer apellido:** | | | |

- No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.
- Tiempo total para el examen: 2h

Preguntas de test (20%)

El coeficiente de x^6y^9 en el desarrollo de $(x-3y)^{15}$ es:

a) $\binom{15}{6}$ b) $-3^9\binom{15}{6}$ c) $3^9\binom{15}{9}$ **B**

El número de cadenas de bits de longitud 21 que son capicúas (o palíndromos) es:

a) 2^{10} b) 2^{11} c) 2^{21} **B**

La función recursiva $f: \mathrm{LIST_P}(\mathbb{N}) \to \mathrm{LIST}(\mathbb{N})$ definida por

$$f(\mathrm{L}) = \begin{cases} [\,0\,] & \text{si } \mathrm{L} = [\,] \\ [\,1\,] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} = 1 \\ f(\mathrm{RESTO\,(RESTO\,(L))}) \,\|\, [[\mathrm{CAB\,(L)}]] & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene como conjunto de partida:

a) {[0],[1]} b) {[ ]} c) {[ ]} ∪ {listas planas de longitud 1} **C**

Las selecciones ordenadas de dos elementos cualesquiera del conjunto A = {*a*, *b*, *c*} son:

a) *a a a b a c b a b b b c c a c b c c*
b) *a b a c b a b c c a c b*
c) *a b a c b c*

A

Sean $n, r \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq r > 1$. Se verifica que:

a) $V(n, r) > C(n, r)$ b) $V(n, r) < C(n, r)$ c) $V(n, r) = C(n, r)$ **A**

Sea P(n) una propiedad sobre el número natural n de la que se sabe que, para todo $n \geq 10$, si P(n) y P($n+1$) son ciertas entonces también lo es P($n+2$). Para asegurar que la propiedad es cierta para todo $n \geq 10$ basta probar que:

a) P(10) es cierta. b) P(9) y P(10) son ciertas. c) P(10) y P(11) son ciertas. **C**

Definiciones (10%)

1. Definir reglas básicas de una función recursiva.

   Las reglas básicas son las que definen el valor de la función de manera explícita para algunos elementos del conjunto inicial.

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una correspondencia recursiva de la que se conoce únicamente la definición de su regla recursiva:

$$f(n) = f(n-2) + f(n-3).$$

   Establecer el mínimo conjunto de partida de f para que sea función y dar una posible definición completa de f.

   Como el conjunto inicial es $\mathbb{N}$ y en la regla recursiva el valor $f(n)$ se apoya en $f(n-3)$ es necesario definir la función de modo explícito para 0, 1 y 2 y, por tanto, el conjunto de partida será $CP_f = \{0, 1, 2\}$. Una posible definición para f es:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4 & \text{si } n = 1 \\ 3 & \text{si } n = 2 \\ f(n-2) + f(n-3) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicios (30%)

1. Probar por inducción que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 2$, siendo

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \text{ RB} \\ 2f(n-1) + (n-1) & \text{si } n \geq 3 \text{ RR} \end{cases} \quad \text{y} \quad g(n) = 2^n - (n+1).$$

Paso base: Para $n = 2$ se verifica que:

$$f(2) \underset{\text{RB}}{=} 1 \quad \text{y} \quad g(2) = 2^2 - (2+1) = 2^2 - 3 = 1. \text{ Por tanto, } f(2) = g(2).$$

Paso de inducción: Tomamos $n \geq 2$ y suponemos que $f(n) = g(n)$ (Hipótesis de Inducción)

Probemos que $f(n+1) = g(n+1)$:

Como $n \geq 2$, se tiene que $n + 1 \geq 3$ y entonces hay que usar la regla recursiva, RR:

$$f(n+1) \underset{\text{RR}}{=} 2f(n) + n \underset{\text{Hip. Inducción}}{=} 2g(n) + n = 2 \cdot (2^n - (n+1)) + n = 2^{n+1} - 2 \cdot (n+1) + n =$$

$$= 2^{n+1} - n - 2 = 2^{n+1} - (n+2) = g(n+1).$$

Entonces, el principio de inducción garantiza que la propiedad es verdadera para todo $n \geq 2$, es decir, $f(n) = g(n)$, para todo $n \geq 2$.

2. Sea $f : \mathrm{LIST}(\mathbb{N}) \to \mathrm{LIST_P}(\mathbb{N})$ la función recursiva definida por

$$f\,(\mathrm{L}) = \begin{cases} [\ ] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} = 0 & \mathrm{RB} \\ [\,\mathrm{CAB\,(L)}\,] \,\|\, f\,(\mathrm{RESTO\,(L)}) & \text{si } \mathrm{LONG(L)} \geq 1 \text{ y } \mathrm{LISTA(CAB(L))} = 0 & \mathrm{RR_1} \\ f\,(\,\mathrm{CAB\,(L)}\,) \,\|\, f\,(\mathrm{RESTO\,(L)}) & \text{en otro caso} & \mathrm{RR_2} \end{cases}$$

a) (*2 puntos*) Evaluar detalladamente f ([[1, 4], 4, [2]]) y hallar el árbol de dependencia correspondiente, T_f ([[1, 4], 4, [2]]).

Se realiza la evaluación de f ([[1, 4], 4, [2]]) indicando en cada paso la regla que se utiliza. En cada caso, hay llamadas de la función f a listas de menor longitud o menor profundidad. Después de llegar a la regla básica se realiza el "remonte", indicado con flechas, para obtener el resultado de la evaluación de f ([[1, 4], 4, [2]]).

$$f([\,[1,4],4,[2]\,]) \underset{\mathrm{RR_2}}{=} f(\,[1,4]\,) \,\|\, f\,(\,[\,4,[2]\,]\,) \quad = [1,4] \,\|\, [\,4,2\,] = [1,4,4,2]$$

$$f\,(\,[1,4]\,) \underset{\mathrm{RR_1}}{=} [1] \,\|\, f\,(\,[\,4\,]\,) = [1] \,\|\, [4] = [1,4]$$

$$f\,(\,[4]\,) \underset{\mathrm{RR_1}}{=} [4] \,\|\, f\,(\,[\ ]\,) = [4] \,\|\, [\ ] = [4]$$

$$f\,(\,[\ ]\,) \underset{\mathrm{RB}}{=} [\ ]$$

$$f\,([\,4,[2]\,]) \underset{\mathrm{RR_1}}{=} [4] \,\|\, f\,(\,[\,[2]\,]\,) = [4] \,\|\, [2] = [4,2]$$

$$f\,([\,[2]\,]) \underset{\mathrm{RR_2}}{=} f\,(\,[2]\,) \,\|\, f\,(\,[\ ]\,) = [2] \,\|\, [\ ] = [2]$$

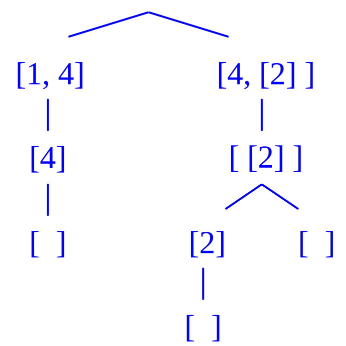
$$f\,(\,[2]\,) \underset{\mathrm{RR_1}}{=} [2] \,\|\, f\,(\,[\ ]\,) = [2] \,\|\, [\ ] = [2]$$

$$f\,(\,[\ ]\,) \underset{\mathrm{RB}}{=} [\ ]$$

$$f\,(\,[\ ]\,) \underset{\mathrm{RB}}{=} [\ ]$$

El árbol de dependencia es:

T_f([[1, 4], 4, [2]]) = [[1, 4], 4, [2]]



b) (*1 punto*) Describir lo que hace f sobre listas planas y sobre listas que no lo son.

La función f deja igual a las listas planas y "aplana" las listas que no son planas, es decir, elimina los corchetes internos de las listas no planas.

3. Un grupo de teatro está constituido por 10 niños y entre ellos no hay dos que tengan la misma estatura. Para una función hay que elegir a 6 de ellos para que salgan al escenario en fila con sus alturas en orden creciente.

   a) (*1.5 puntos*) ¿Cuántas posibles formaciones existen?

   Basta elegir los 6 niños que van a participar en la fila ya que luego el orden de colocación en ella estará determinado por sus alturas. Entonces dos selecciones solo se diferenciarán en los elementos que contienen, y se trata, por tanto, de las combinaciones de 10 niños tomados de 6 en 6. Obviamente, no hay repeticiones ya que deben ser 6 niños distintos.

   Su número es: C(10, 6) = $\binom{10}{6} = \dfrac{10!}{6!\cdot 4!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$

   b) (*1.5 puntos*) ¿En cuántas de ellas participan el más alto o el más bajo?

   A = {selecciones que contienen al más alto}
   B = {selecciones que contienen al más bajo}

   Lo que se pide es el número de selecciones del conjunto $A \cup B$ y por el principio de inclusión - exclusión se verifica: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

   $|A|$ = C(9, 5) pues como el niño más alto debe participar en la fila solo hay que elegir a otros 5 niños entre los 9 restantes, razonando como en el apartado anterior.

   $|B|$ = C(9, 5) por idéntico razonamiento.

   $|A \cap B|$ = C(8, 4) pues ahora el más alto y el más bajo participan en la fila y hay que elegir a otros 4 niños entre los 8 restantes.

   Por tanto, se obtiene que:

   $|A \cup B|$ = C(9, 5) + C(9, 5) – C(8, 4) = $\dfrac{9!}{5!\cdot 4!} + \dfrac{9!}{5!\cdot 4!} - \dfrac{8!}{4!\cdot 4!} = \dfrac{8!\cdot(9+9-5)}{5\cdot 4!\cdot 4!} = \dfrac{13\cdot 8!}{5\cdot 4!^2}$

4. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 peces pequeños indistinguibles y uno grande en 4 peceras distintas?

Hay que colocar los 11 peces en las 4 peceras y éstas son lo suficientemente grandes para albergar tantos peces como se desee. Como la colocación del pez grande es independiente de la colocación de los pequeños se puede organizar un proceso en dos pasos para distribuirlos y usar luego el principio de multiplicación.

Paso 1: Elegir en qué pecera se añade el pez grande. Puede ser cualquiera de las 4 peceras.

Paso 2: Elegir la colocación de los 10 peces pequeños en las 4 peceras.

Hay que elegir una pecera para cada pez, es decir, hay que hacer una selección de 10 peceras, de modo que:

- éstas pueden repetirse, ya que en cada pecera caben todos ellos y
- el orden no influye, ya que los peces son iguales.

Se trata, por tanto, de las combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 10 en 10 y su número es:

$$CR\,(4, 10) = PR(3 + 10, 3, 10) = \frac{13!}{3!\cdot 10!}$$

Como por este procedimiento todas las distribuciones son distintas (pues o cambia la colocación de alguno de los peces pequeños o bien la del grande), el principio de multiplicación afirma que el número de distribuciones posibles es

$$4 \cdot CR\,(4, 10) = 4\cdot\frac{13!}{3!\cdot 10!} = 4\cdot\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2} = 4\cdot 13\cdot 2\cdot 11 = 1144$$

Problema 1 (20%):

a) (*6 puntos*) Definir recursivamente una función $f : \text{LIST}_P(\mathbb{N}) \to \text{LIST}(\mathbb{N})$ tal que dada una lista plana L construya la lista que se obtiene al sustituir cada uno de sus elementos por la lista que lo contiene a él y a un número que indica la paridad de la posición i que ocupa en la lista: 1 si i es impar y 0 si i es par. Por ejemplo, $f([2, 3, 6, 4]) = [[2, 1], [3, 0], [6, 1], [4, 0]]$.

Podemos dar la siguiente definición recursiva de f:

$$f(\text{L}) = \begin{cases} [\,] & \text{si } \text{LONG(L)} = 0 \quad \text{RB}_1 \\ [[\text{CAB(L)}, 1]] & \text{si } \text{LONG(L)} = 1 \quad \text{RB}_2 \\ [[\text{CAB(L)},1], [\text{CAB(RESTO(L))}, 0]] \,\|\, f(\text{RESTO(RESTO(L))}) & \text{si } \text{LONG(L)} \geq 2 \quad \text{RR} \end{cases}$$

En la recursividad se va construyendo la lista $f(\text{L})$ mediante la estrategia siguiente:

1. Se forman las listas obtenidas emparejando el primer elemento de L, CAB(L), con 1 pues tiene posición impar en la lista y el segundo elemento de L, CAB(RESTO(L)), con 0 pues su posición en la lista es par.
2. Se forma la lista que contiene como elementos las dos listas anteriores.
3. Se concatena la lista anterior con la lista que devuelve la función aplicada sobre la lista obtenida eliminando los dos primeros elementos de L, f(RESTO (RESTO(L))).

Mediante este proceso se llega a una lista de longitud 1, si la lista de partida tiene longitud impar o, en caso contrario, a la lista vacía. Por ello ha sido necesario definir dos reglas básicas, una para la lista vacía y otra para las listas de longitud 1.

b) (*1 punto*) Evaluar detalladamente $f([2, 3, 6])$ y $f([2, 3, 6, 4])$ y hallar los árboles de dependencia correspondientes.

Se realizan las evaluaciones pedidas indicando en cada paso la regla que se utiliza. En cada caso, hay llamadas de la función f a listas de menor longitud. Después de llegar a una de las dos reglas básicas se realiza el "remonte", indicado con flechas, para obtener el resultado de la evaluación.

$$f([2, 3, 6]) \underset{\text{RR}}{=} [[2, 1], [3, 2]] \,\|\, f([6]) = [[2, 1], [3, 2]] \,\|\, [[6, 1]] = [[2, 1], [3, 2], [6, 1]]$$

$$f([6]) \underset{\text{RB}_2}{=} [[6, 1]]$$

$$f([2, 3, 6, 4]) \underset{\text{RR}}{=} [[2, 1], [3, 2]] \,\|\, f([6, 4]) = [[2, 1], [3, 2]] \,\|\, [[6, 1], [4, 2]] = $$
$$= [[2, 1], [3, 2], [6, 1], [4, 2]]$$

$$f([6, 4]) \underset{\text{RR}}{=} [[6, 1], [4, 2]] \,\|\, f([\,]) = [[6, 1], [4, 2]] \,\|\, [\,] = [[6, 1], [4, 2]]$$

$$f([\,]) \underset{\text{RB}_1}{=} [\,]$$

Los árboles de dependencia son:

$T_f([2, 3, 6]) =$ [2, 3, 6]
|
[6]

$T_f([2, 3, 6, 4]) =$ [2, 3, 6, 4]
|
[6, 4]
|
[ ]

c) (*3 puntos*) Dar una expresión para la profundidad del árbol de dependencia T_f (L) en función sólo de la longitud de L. Nota: La profundidad de un árbol es el número de aristas de su rama más larga.

Si L es una lista de longitud $n \geq 2$, cada vez que se usa la regla recursiva, RR, para hallar f (L) la longitud de la lista disminuye en dos unidades. Por tanto,

- Si n es par, al cabo de $\frac{n}{2}$ llamadas a RR se debe evaluar f([ ]) y aplicar la primera regla básica RB_1. En este caso, se hacen $\frac{n}{2}+1$ evaluaciones y la profundidad del árbol de dependencia es $\frac{n}{2}$ (pues es el número de aristas, no de nodos).

- Si n es impar ($n \geq 3$), al cabo de $\frac{n-1}{2}$ llamadas a RR se debe evaluar f([a_n]), siendo a_n el último elemento de la lista de partida , y aplicar la segunda regla básica RB_2. En este caso, se hacen $\frac{n-1}{2}+1$ evaluaciones y la profundidad del árbol de dependencia es $\frac{n-1}{2}$.

Entonces, si L es una lista de longitud n, $g(n)$ devuelve la profundidad del árbol de dependencia T_f (L), siendo

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, 1 \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par, } n \geq 2 \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar, } n \geq 3 \end{cases}$$

Problema 2 (20%):

Se quieren usar las letras de la palabra MURCIÉLAGOS para formar palabras de 5 letras distintas, con sentido o no.

a) (*3 puntos*) ¿Cuántas hay que contengan la palabra SOL?

PASO 1: Hay que elegir las otras dos letras que acompañen a SOL. Como todas las letras deben ser distintas, no hay repeticiones y como de momento solo se quiere elegirlas, no importa el orden. Se trata de las combinaciones de 11 – 3 elementos (11 letras de MURCIÉLAGOS salvo S, O y L) tomados de 2 en 2.

Hay $\binom{11-3}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$ formas de elegir 2 letras distintas del conjunto {M, U, R, C, I, É, L, A, G, O, S} .

PASO 2: Hay que permutar las dos letras elegidas en el paso anterior con SOL considerado como bloque. Por tanto, hay 3! maneras de colocarlas.

Todos los resultados obtenidos en este proceso son distintos pues o bien las dos letras elegidas en el paso 1 son distintas o bien la colocación que elegimos de ellas y SOL es distinta.

Por lo que el principio de multiplicación permite afirmar que el número de palabras es:

$$\binom{8}{2}\cdot 3! = \frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 3! = 28\cdot 3! = 168$$

b) (*4 puntos*) ¿Cuántas hay que no tengan juntas consonantes ni tampoco vocales?

Tales palabras deben tener consonantes y vocales alternas y se pueden distinguir dos casos dependiendo de si empieza por vocal o por consonante. Es decir, hay que contar los elementos del conjunto $A \cup B$, siendo

A = {palabras de 5 letras distintas que empiezan por vocal y alternan vocales y consonantes} =
= { $V_1C_1V_2C_2V_3$ / V_i es vocal y C_j es consonante de la palabra MURCIÉLAGOS }
B = {palabras de 5 letras distintas que empiezan por consonante y alternan vocales y consonantes} =
= { $C_1V_2C_2V_3C_3$ / V_i es vocal y C_j es consonante de la palabra MURCIÉLAGOS }

Y como son disjuntos el principio de adición afirma que $|A \cup B| = |A| + |B|$

Como las vocales y consonantes no se mezclan basta con contarlas por separado y utilizar el principio de multiplicación. En cada caso se trata de variaciones pues el orden de colocación influye y no hay repeticiones pues las letras deben ser distintas:

$$|A \cup B| = |A| + |B| = V(6, 3)\cdot V(5,2) + V(5, 3)\cdot V(6,2) =$$
$$= 6\cdot 5\cdot 4\cdot 5\cdot 4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 6\cdot 5 = 6\cdot 5\cdot 5\cdot (16 + 12) = 4200$$

c) (*3 puntos*) ¿Cuántas hay que tengan exactamente dos consonantes y que no vayan juntas?

Sea A = {palabras de 5 letras de MURCIÉLAGOS
que tienen exactamente 3 vocales y 2 consonantes que no van juntas}.

Se considera el conjunto U definido por:

U = {palabras de 5 letras de MURCIÉLAGOS con 3 vocales y 2 consonantes}.

El complementario de A respecto de U es:

$\overline{A}$ = {palabras de 5 letras distintasde MURCIÉLAGOS
que tienen exactamente 3 vocales y 2 consonantes que van juntas}

Para contar las palabras de $\overline{A}$ utilizamos el principio de multiplicación:

Paso 1: Elegir las 2 consonantes que irán juntas y su orden. Hay V(6, 2) = 6 · 5

Paso 2: Elegir las 3 vocales que las acompañarán sin ordenación pues ésta la consideraremos después. Hay C(5, 3) = $\binom{5}{3}$.

Paso 3: Permutamos las 3 vocales con el bloque de las 2 consonantes: Hay P(4) = 4!

Todos los resultados son distintos pues o bien la elección de consonantes o su orden serán distintos o bien las vocales elegidas serán distintas.

Por el principio de multiplicación el número de palabras de $\overline{A}$ es:

$$V(6, 2) \cdot C(5, 3) \cdot P(4) = 6 \cdot 5 \cdot \binom{5}{3} \cdot 4! = 6 \cdot 5 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 4! = 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 7200$$

Para contar las palabras de U se utiliza también el principio de multiplicación, pero ahora primero elegimos las 2 consonantes y las 3 vocales sin orden y luego permutamos las 5 letras elegidas:

$$|U| = C(6, 2) \cdot C(5, 3) \cdot P(5) = \binom{6}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 5! =$$
$$= \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 5! = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 18000$$

Entonces, por el principio del complementario se tiene que:

$$|A| = |U| - |\overline{A}| = C(6, 2) \cdot C(5, 3) \cdot P(5) - V(6, 2) \cdot C(5, 3) \cdot P(4) = 18000 - 7200 = 10800$$