LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. TERCER PARCIAL **20/01/2017**

Apellidos y Nombre:...

Indicaciones: **Tres primeras letras del primer apellido:** | | | |

- No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto y cada ejercicio sobre 3 puntos.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.
- Tiempo total para el examen: 2h

Preguntas de test (20%)

Sea G un grafo acíciclo. Si n es el número de vértices, q es el número de aristas y k el de componentes conexas de G, una terna de valores posibles para n, q y k es:

a) $n = 15$, $q = 10$, $k = 5$ b) $n = 10$, $q = 15$, $k = 5$ c) $n = 15$, $q = 10$, $k = 25$

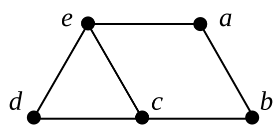
A

Los dos grafos siguientes son bipartitos:

a) C_5 y P_6 b) K_5 y C_6 c) P_5 y C_6

C

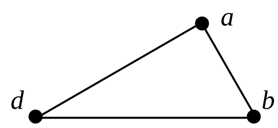
Se considera el siguiente grafo G:

G 

El subgrafo de G inducido por los vértices de grado 2 es:

a) 

b) 

c) 

B

En el conjunto ordenado $(\{2, 3, 5, 6, 18, 24\}, |)$ se verifica:

a) No hay maximales. b) Hay dos maximales c) Hay tres maximales

C

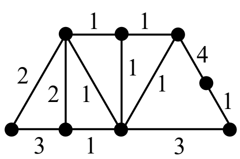
La clase de equivalencia $\overline{26}$ en $\mathbb{Z}_{15}$ coincide con:

a) $\overline{14}$ b) $\overline{11}$ c) $\overline{6}$

B

Cualquier árbol recubridor de peso mínimo del siguiente grafo tiene peso:

a) 7.
b) 10.
c) 17.



B

Definiciones (10%)

1. Definir elementos comparables de un conjunto ordenado (A, $\leq$).

Dados a, $b \in$ A, se dice que a y b son comparables si se verifica que $a \leq b$ ó bien $b \leq a$.

2. Enunciar la fórmula de Euler para los grados de los vértices de un grafo G y justificarla.

La suma de los grados de los vértices de un grafo es igual al doble del número de aristas, es decir, si un grafo G = (V, A) tiene q aristas y n vértices, se verifica: $\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2q$

Justificación: cada arista es adyacente a dos vértices, por tanto, si se suman los grados de los vértices cada arista se cuenta dos veces, una por cada extremo.

Ejercicios (30%)

1. En el conjunto A de las circunferencias del plano se define la relación:

$$C_1 \text{ R } C_2 \iff \text{el radio de la circunferencia } C_1 \text{ es igual al de } C_2.$$

Estudiar si R es antisimétrica y si es transitiva.

Antisimétrica: $\forall\, C_1, C_2 \in A,\ C_1 \text{ R } C_2,\ C_2 \text{ R } C_1 \Rightarrow C_1 = C_2$

La relación R no es antisimétrica puesto que existen circunferencias C_1 y C_2 que tienen igual radio por lo que C_1 R C_2 y C_2 R C_1 pero que son distintas por tener distinto centro. Es decir, de C_1 R C_2 y C_2 R C_1 no se deduce $C_1 = C_2$.

Transitiva: $\forall\, C_1, C_2, C_3 \in A,\ C_1 \text{ R } C_2,\ C_2 \text{ R } C_3 \Rightarrow C_1 \text{ R } C_3$

Sean $C_1, C_2, C_3 \in$ A tales que C_1 R C_2 e C_2 R C_3. Entonces, el radio de la circunferencia C_1 es igual al de C_2 y el radio de la circunferencia C_2 es igual al de C_3. Por tanto, el radio de la circunferencia C_1 es igual al de C_3 y se tiene que C_1 R C_3.

Por tanto, R es transitiva.

2. Se considera el conjunto A de los números naturales pares entre 0 y 14, incluidos. En A se define la relación de equivalencia R:

$$n \text{ R } m \iff \text{el producto de las cifras de } n \text{ es igual al de las cifras de } m.$$

Describir cada clase de equivalencia. Hallar el conjunto cociente A/R y su cardinal.

Dado el conjunto A = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} para hallar el conjunto cociente, estudiamos las clases de equivalencia que establece la relación R:

La clase del 0 es: $[0] = \{x \in A \,/\, x \text{ R } 0\} = \{0, 10\} = [10]$ pues $1 \cdot 0 = 0$
La clase del 2 es: $[2] = \{x \in A \,/\, x \text{ R } 2\} = \{2, 12\} = [12]$ pues $1 \cdot 2 = 2$
La clase del 4 es: $[4] = \{x \in A \,/\, x \text{ R } 4\} = \{4, 14\} = [14]$ pues $1 \cdot 4 = 4$

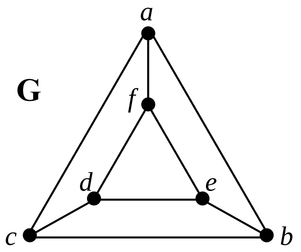
Las otras dos clases solo tienen un elemento:

La clase del 6 es: $[6] = \{x \in A \,/\, x \mathrel{R} 6\} = \{6\}$
La clase del 8 es: $[8] = \{x \in A \,/\, x \mathrel{R} 8\} = \{8\}$

Así, el conjunto cociente es: $A/R = \{[0], [2], [4], [6], [8]\}$ y su cardinal es 5.

3. Dar tres árboles recubridores del grafo G que no sean isomorfos entre sí. Justificar que no lo son.

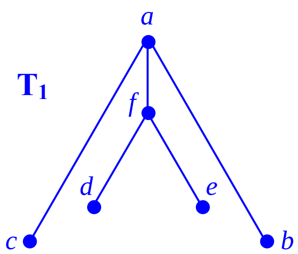
G



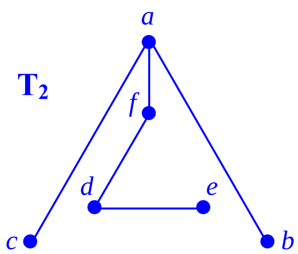
Como el grafo G tiene 6 vértices, sus árboles recubridores serán subgrafos de G conexos y con 5 aristas.

Por ejemplo, son árboles recubridores de G los tres árboles siguientes:

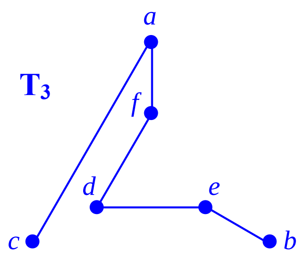
T_1



T_2



T_3



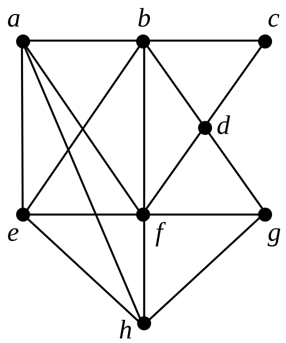
Sus secuencias de grados son:

$sec(T_1) = [3, 3, 1, 1, 1, 1]$ $sec(T_2) = [3, 2, 2, 1, 1, 1]$ $sec(T_3) = [2, 2, 2, 2, 1, 1]$

Por tanto, tienen secuencias de grados distintas y no son isomorfos dos a dos.

4. Estudiar si el grafo G es euleriano o semieuleriano. En caso de serlo, dar un circuito o un recorrido euleriano, según corresponda.

G



La secuencia de grados de G es: [6, 5, 4, 4, 4, 4, 3].

Como G tiene vértices de grado impar, G no es euleriano y como son exactamente dos los vértices de grado impar de G, *g* y *b*, el grafo G es semieuleriano.

Un recorrido euleriano de G debe empezar en uno de los vértices de grado impar y acabar en el otro. Por ejemplo:

g, f, b, d, c, b, e, h, a, f, d, g, h, f, e, a, b

Problema 1 (15%):

Dado un número natural n, $n \geq 2$, se llama *composición aditiva* de n a cada manera ordenada de escribir n como suma de uno o más sumandos no nulos. Por ejemplo, el conjunto de las *composiciones* de 3 es:

$$A_3 = \left\{ \boxed{1+1+1}, \boxed{1+2}, \boxed{2+1}, \boxed{3} \right\}$$

En A_n se define la siguiente relación de orden:

$c_1 \text{ R } c_2 \Leftrightarrow c_1$ y c_2 son iguales o bien es posible obtener c_2 sumando términos consecutivos de c_1.

Por ejemplo, en A_3: $\boxed{1+1+1} \text{ R } \boxed{1+2}$ puesto que $1 + 1 + 1 = 1 + (1 + 1) = 1 + 2$.

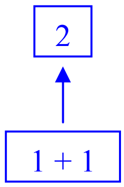
Se pide lo siguiente:

a) (*4 puntos*) Dibujar el diagrama de Hasse de A_2, de A_3 y de A_4 con la relación R.

b) (*2 puntos*) Hallar los elementos notables del conjunto $A_4 - \left\{ \boxed{1+1+1+1} \right\}$

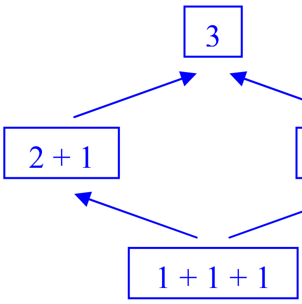
c) (*4 puntos*) Probar que en (A_n, R) existe una cadena de n elementos, es decir, un camino de longitud $n - 1$ en su diagrama de Hasse.

a) El diagrama de Hasse de $A_2 = \left\{ \boxed{1+1}, \boxed{2} \right\}$ es:

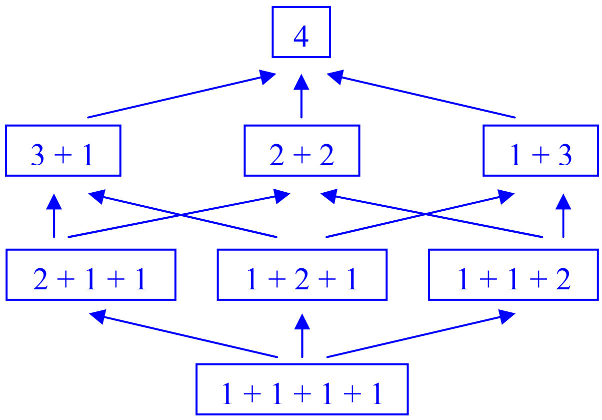


pues $1 + 1 = 2$.

El diagrama de Hasse de A_3 es:



El diagrama de Hasse de A_4 es:



b) Los elementos notables del conjunto

$\boxed{4}$ es el máximo de B puesto que es mayor que todos los elementos de B y, por tanto, solo hay un maximal.

$\boxed{2+1+1}$, $\boxed{1+2+1}$ y $\boxed{1+1+2}$ son minimales de B puesto que no hay elementos de B que sean menores que ellos. Y como B tiene varios minimales, B no tiene máximo.

c) Para construir en A_n una cadena con n nodos basta partir del elemento $\boxed{1+\overset{n}{\dots}+1}$ e ir sumando los dos primeros términos en cada paso hasta llegar a obtener n.

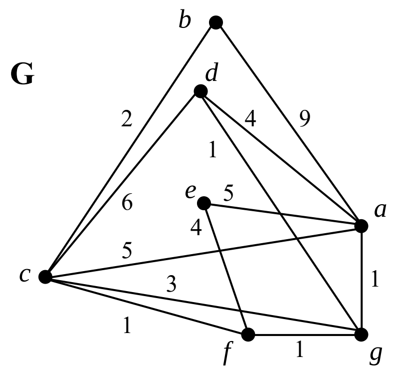
$$\boxed{1+\overset{n}{\dots}+1} \to \boxed{2+1+\overset{n-2}{\dots}+1} \to \boxed{3+1+\overset{n-3}{\dots}+1} \to \cdots \to \boxed{(n-1)+1} \to \boxed{n}$$

Nº sumandos: n $\quad n-1$ $\quad n-2$ $\quad 2$ $\quad 1$

Problema 2 (25%):

Una red eléctrica tiene subestaciones que controlan el flujo de energía y lo distribuyen dependiendo de la demanda que haya en las distintas zonas. Las subestaciones están unidas por cable formando una red y se comunican para saber donde desviar la energía para poder responder a la demanda de cada zona. En el grafo G aparecen las subestaciones de una región, sus conexiones y el tiempo que tardan en realizarse las comunicaciones directas entre ellas.

En la tabla siguiente, parcialmente rellena, se muestra el tiempo mínimo que hay que emplear para realizar la comunicación entre dos subestaciones cualesquiera.



	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	**r(.)**
a	**0**	**5**	**3**	**2**	**5**	**2**	**1**	**5**
b	**5**	**0**	2	5	7	3	4	**7**
c	**3**	**2**	0	3	5	1	2	**5**
d	**2**	**5**	3	0	6	2	1	**6**
e	**5**	**7**	5	6	0	4	5	**7**
f	**2**	**3**	1	2	4	0	1	**4**
g	**1**	**4**	2	1	5	1	0	**5**

a) (*4 puntos*) Aplicar el algoritmo de Dijkstra y las propiedades que sean necesarias para completar la tabla.

Aplicando el algoritmo de Dijkstra desde el vértice *a* se obtiene:

P	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	camino
a	0	9	5	4	5	∞	$\underline{\underline{1}}$	*a*, *g*
g	/	9	4	$\underline{\underline{2}}$	5	2	/	*a*, *g*, *d*
d	/	9	4	/	5	$\underline{\underline{2}}$	/	*a*, *g*, *f*
f	/	9	$\underline{\underline{3}}$	/	5	/	/	*a*, *g*, *f*, *c*
c	/	$\underline{\underline{5}}$	/	/	5	/	/	*a*, *g*, *f*, *c*, *b*
b	/	/	/	/	$\underline{\underline{5}}$	/	/	*a*, *e*
d(*a*, ·)	0	5	3	2	5	2	1	

Con estos datos se puede rellenar la fila y columna de *a* en la tabla de distancias.

Para rellenar la columna de *b* basta aplicar la propiedad simétrica de la distancia:

$$d(v, w) = d(w, v)$$

y que:

$$d(v, v) = 0$$

b) (*3 puntos*) ¿En qué subestación se debe colocar una unidad de control para que el acceso a cualquiera de las demás subestaciones sea lo más rápido posible? ¿Cuál sería el tiempo total que se tardaría en mandar desde la subestación elegida un mensaje a cada subestación y recibir la confirmación de la última, si hay que esperar la respuesta (inmediata) de cada una de ellas para enviar el siguiente mensaje inmediatamente después a la siguiente?

Como se quiere que el acceso a cualquiera de las demás subestaciones sea lo más rápido posible, hay que obtener el centro del grafo, que es el vértice que minimiza el radio de los vértices (el radio de un vértice, en este caso, da el tiempo que se requiere para que se reciba la información en la subestación más alejada de él).

En la primera tabla se han calculado todos los radios y el menor tiene valor 4 y se corresponde con el vértice *f* . Por tanto, *f* es el único centro de G y la unidad de control debe colocarse en él.

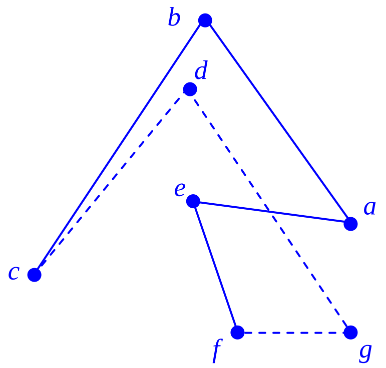
El tiempo total que se tardaría en mandar desde la unidad de control f un mensaje a cada subestación y recibir la confirmación de la última, coincide con el doble de la suma de las distancias de f al resto de los vértices:

$$2 \cdot s(f) = 2 \cdot (2 + 3 + 1 + 2 + 4 + 1) = 2 \cdot 13 = 26$$

c) (*3 puntos*) Se quiere comprobar el estado de la red con un dron que visite todas las subestaciones siguiendo los cables, sin pasar dos veces por la misma y volviendo al punto de partida. Estudiar si es factible y, en caso afirmativo, dar una forma de hacerlo.

En este caso hay que encontrar un ciclo hamiltoniano del grafo G, puesto que es necesario pasar por todos los nodos y volver al punto inicial.

Para construir el ciclo, se observa que las aristas adyacentes a los vértices *e* y *d* (en trazo continuo en la figura inferior) deben formar parte del ciclo pues estos vértices tienen grado dos. Y luego es fácil completar el ciclo (aristas de trazo discontinuo).



Un posible ciclo hamiltoniano es:

$$f, g, d, c, b, a, e, f$$

Por tanto, el dron podría visitar todas las subestaciones partiendo desde cualquier vértice y volver a él, siguiendo los cables (aristas) dadas en el ciclo anterior.