ETSISI
UPM

Apellidos: **Iniciales 1er apellido:**

Nombre:

Lógica y Matemática Discreta

11/1/2016

Final de enero

Instrucciones:

- En cada pregunta de test, una y sólo una de las afirmaciones a), b) y c) es cierta.
- Calificación del test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto cada una.
- Calificación de los ejercicios: sobre 3 puntos cada uno.
- Tiempo para esta parte del examen: **2 horas.**
- No se permite el uso de calculadoras.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en *Moodle*.

TEST

El conectivo principal de la fórmula $\neg(p \to (q \to \neg t)) \vee \neg q \to t$ es

a) la negación.
b) la disyunción.
c) el condicional.

C

La correspondencia recursiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n-1+f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

verifica que

a) $f(6) = 9$.
b) $f(6) = 12$.
c) $f(6)$ no se puede calcular.

A

En $\mathbb{Z}_{16}$ la clase $\overline{23}$ es la misma que

a) $\overline{7}$. b) $\overline{14}$. c) $\overline{1}$.

A

Sea G un grafo conexo con n vértices en el que todas las aristas son puentes. Entonces

a) G tiene un ciclo.
b) tiene $n-1$ aristas.
c) tiene $n+1$ aristas.

B

La fórmula $\neg(p \vee \neg q) \to s$ verifica que:

a) Tiene exactamente un no modelo.
b) $v(p) = v(q) = v(s) = 0$ es un no modelo.
c) No tiene no modelos.

$\boxed{\textbf{A}}$

Antiguamente una señal ferroviaria consistía en 8 bandas de colores (colgadas de una barra horizontal) siendo 4 rojas, 3 blancas y una azul. ¿Cuántas señales distintas podían realizarse?

a) $4! \cdot 3!$
b) $8!$
c) $\dfrac{8!}{4! \cdot 3!}$

$\boxed{\textbf{C}}$

La función recursiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

tiene como conjunto de partida

a) $\{1, 2\}$
b) $\{0, 1\}$
c) Los pares mayores o iguales que 2

$\boxed{\textbf{B}}$

Si G es un grafo regular de grado r con n vértices y q aristas, una posible terna de valores para r, n y q es

a) $r = 4,\ n = 5,\ q = 20.$
b) $r = 5,\ n = 4,\ q = 10.$
c) $r = 4,\ n = 5,\ q = 10.$

$\boxed{\textbf{C}}$

La siguiente fórmula es una fórmula cerrada

a) $\forall x\, (P(x, x) \to Q(x)).$
b) $\forall x\, P(x, y) \to \exists y\, Q(y).$
c) $\forall x\, \neg P(x, x) \vee Q(y).$

$\boxed{\textbf{A}}$

¿Cuál de los siguientes grafos es semieuleriano?

a) Q_3.
b) $K_{2,3}$.
c) K_3.

$\boxed{\textbf{B}}$

DEFINICIONES

1. Definir tautología.

Es una fórmula que solo tiene modelos, es decir, su valor veritativo bajo cualquier valoración (o interpretación, en lógica de predicados) es 1.

2. Definir regla recursiva en una función recursiva $f : A \longrightarrow B$.

Aquella que define el valor de f sobre un elemento $a \in A$ en términos de los valores que toma f en otros elementos del conjunto A.

3. Enunciar el principio de inclusión-exclusión para 3 conjuntos.

Si A, B, C son tres conjuntos finitos entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

4. Definir elemento maximal en un conjunto ordenado $(A, \preceq)$.

Se dice que $m \in A$ es maximal si y solo si no hay otro elemento $a \in A$ tal que $m \preceq a$ con $a \neq m$.

5. Definir grafo bipartito.

Aquel cuyo conjunto de vértices V se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos V_1, V_2, es decir, $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de modo que toda arista del grafo tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Demostrar, mediante reglas de inferencia, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$p \to \neg q, \quad \neg q \to r \vee s, \quad \neg(p \to r), \quad s \to t \quad \Rightarrow \quad t$$

Por derivación:

a) $p \to \neg q, \quad \neg q \to r \vee s \quad \Rightarrow \quad p \to r \vee s$ por silogismo.

b) $\neg(p \to r) \equiv p \wedge \neg r$.

c) $p \wedge \neg r \quad \Rightarrow \quad p, \quad \neg r$ por simplificación.

d) $p, \quad p \to r \vee s \quad \Rightarrow \quad r \vee s$ por Modus Ponens.

e) $\neg r, \quad r \vee s \quad \Rightarrow \quad s$ por silogismo disyuntivo.

f) $s, \quad s \to t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t}$ por Modus Ponens.

Ejercicio 2. Hallar una fórmula equivalente a $F = \neg((p \to \top) \to (r \to q))$ que sea conjunción de literales. Indicar las equivalencias elementales usadas en cada paso.

$$\begin{array}{rll} F & = \neg((p \to \top) \to (r \to q)) & \overset{(1)}{\equiv} \\ & \equiv (p \to \top) \wedge \neg(r \to q) & \overset{(2,1)}{\equiv} \\ & \equiv (\neg p \vee \top) \wedge (r \wedge \neg q) & \overset{(3)}{\equiv} \\ & \equiv \top \wedge (r \wedge \neg q) & \overset{(4)}{\equiv} \\ & \equiv r \wedge \neg q & \end{array}$$

Donde

$$\begin{array}{llll} (1) & \neg(A \to B) & \equiv & A \wedge \neg B \\ (2) & A \to B & \equiv & \neg A \vee B \\ (3) & A \vee \top & \equiv & \top \\ (4) & \top \wedge A & \equiv & A \end{array}$$

Ejercicio 3. Formalizar el siguiente razonamiento, en lógica de predicados con el dominio $D = \{$ animales $\}$:

Todos los animales con pelo son mamíferos. Hay rumiantes que también lo son. Pero Moby Dyck no tiene pelo ni es rumiante. Por tanto, Moby Dyck no es mamífero.

Tomando los siguientes símbolos de predicados y constante la formalización queda así:

$P(x)$: x tiene pelo

$Q(x)$: x es mamífero

$R(x)$: x es rumiante

a : Moby Dick

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \left(P(x) \to M(x)\right) \\ \exists x \left(R(x) \wedge M(x)\right) \\ \neg P(a) \wedge \neg R(a) \\ \hline \neg M(a) \end{array}}$$

Ejercicio 4. Dadas la fórmula $F = \exists x(P(x) \vee Q(x) \to R(x))$ y la interpretación I con dominio $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ y las funciones booleanas P, Q, R parcialmente definidas como sigue, completar su definición para que, en cada caso, I sea

a) un no modelo de F:

$$P : \begin{cases} P(d_1) = 1 \\ P(d_2) = 0 \\ P(d_3) = 1 \end{cases} \quad Q : \begin{cases} Q(d_1) = 1 \\ Q(d_2) = 1 \\ Q(d_3) = 0 \end{cases} \quad R : \begin{cases} R(d_1) = 0 \\ R(d_2) = 0 \\ R(d_3) = 0 \end{cases}$$

b) un modelo de F:

$$P : \begin{cases} P(d_1) = 1 \\ P(d_2) = 0 \\ P(d_3) = 0 \end{cases} \quad Q : \begin{cases} Q(d_1) = 1 \\ Q(d_2) = 0 \\ Q(d_3) = 1 \end{cases} \quad R : \begin{cases} R(d_1) = 0 \\ R(d_2) = 1 \\ R(d_3) = 1 \end{cases}$$

c) un modelo distinto del dado en **b)**:

$$P : \begin{cases} P(d_1) = 1 \\ P(d_2) = 1 \\ P(d_3) = 1 \end{cases} \quad Q : \begin{cases} Q(d_1) = 0 \\ Q(d_2) = 0 \\ Q(d_3) = 1 \end{cases} \quad R : \begin{cases} R(d_1) = 0 \\ R(d_2) = 0 \\ R(d_3) = 1 \end{cases}$$

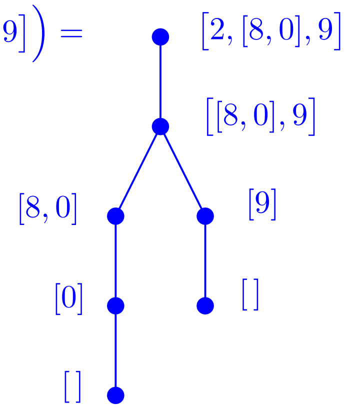
Ejercicio 5. Sea $f : \text{LIST}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{LIST}(\mathbb{Z})$ la función definida recursivamente como

$$f(L) = \begin{cases} [\,] & \text{si } L = [\,] \quad (RB) \\ \big[f\big(\text{CAB}(L)\big)\big] \parallel f(\text{RESTO}(L)) & \text{si } \text{LISTA}(\text{CAB}(L)) = 1 \quad (RR1) \\ [\text{CAB}(L)] \parallel f(\text{RESTO}(L)) & \text{si } \text{LISTA}(\text{CAB}(L)) = 0 \text{ y } \text{CAB}(L) > 5 \quad (RR2) \\ f(\text{RESTO}(L)) & \text{en otro caso} \quad (RR3) \end{cases}$$

Evaluar $f\Big([2,[8,0],9]\Big)$ detalladamente siguiendo el esquema recursivo y hallar el árbol de dependencia $T_f\Big([2,[8,0],9]\Big)$.

$$\begin{aligned}
f\Big([2,[8,0],9]\Big) &\underset{RR3}{=} f\Big([[8,0],9]\Big) \\
f\Big([[8,0],9]\Big) &\underset{RR1}{=} \Big[f\big([8,0]\big)\Big] \parallel f\Big([9]\Big) \\
f\big([8,0]\big) &\underset{RR2}{=} [8] \parallel f\big([0]\big) \\
f\big([9]\big) &\underset{RR2}{=} [9] \parallel f\big([\,]\big) \\
f\big([0]\big) &\underset{RR3}{=} f\big([\,]\big) \\
f\big([\,]\big) &\underset{RB}{=} [\,] \\
f\big([0]\big) &= [\,] \\
f\big([9]\big) &= [9] \parallel [\,] = [9] \\
f\big([8,0]\big) &= [8] \parallel [\,] = [8] \\
f\Big([[8,0],9]\Big) &= \big[[8]\big] \parallel [9] = \big[[8],9\big] \\
f\Big([2,[8,0],9]\Big) &= \big[[8],9\big]
\end{aligned}$$

$T_f\Big([2,[8,0],9]\Big) =$



Ejercicio 6. Probar por inducción que $f(n) = g(n)$ para todo natural $n \geq 0$ siendo

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \quad (RB) \\ 3f(n-1) + 2n - 5 & \text{si } n \geq 1 \quad (RR) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(n) = 3^n - (n-1)$$

Paso base: Para $n = 0$: $f(0) \underset{RB}{=} 2$, $g(0) = 3^0 - 0 + 1 = 1 + 1 = 2$. Luego $f(0) = g(0)$.

Paso inductivo: Supongámoslo cierto para $n \geq 0$, entonces para $n+1$:

$$\begin{aligned}
f(n+1) &\underset{RR\ (n+1\geq 1)}{=} 3f(n) + 2(n+1) - 5 = \\
&\underset{HI}{=} 3 \cdot (3^n - (n-1)) + 2(n+1) - 5 = \\
&= 3^{n+1} - 3n + \cancel{3} + 2n + \cancel{2} - \cancel{5} = 3^{n+1} - n = \\
&= 3^{n+1} - (n+1-1) = g(n+1)
\end{aligned}$$

también es cierto.

Por el principio de inducción, la igualdad es cierta para todo $n \geq 0$.

Ejercicio 7. ¿Cuántas cadenas de 10 bits hay de forma que haya 5 o 6 ceros en los primeros 8 bits y el producto de los dos últimos bits sea 0?

Sean A y B los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{cadenas de 10 bits con 5 ceros en las 8 primeros bits y} \\ &\quad \text{el producto de los dos últimos bits igual a } 0\} \\ B &= \{\text{cadenas de 10 bits con 6 ceros en las 8 primeros bits y} \\ &\quad \text{el producto de los dos últimos bits igual a } 0\} \end{aligned}$$

Entonces lo que se pide es hallar el cardinal de $A \cup B$. Como los conjuntos A y B son claramente disjuntos, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Para obtener el cardinal de estos conjuntos construiremos sus elementos en un proceso en dos pasos. En el primero elegimos los 8 primeros bits de modo que cumplan las condiciones dadas y en el segundo elegimos los dos últimos bits para que su producto sea 0 (hay tres formas de tener eso: 00, 01 y 10).

- Para A:
  - Elegimos una cadena de 8 bits con 5 ceros y 3 unos: hay $\binom{8}{5}$, tantas como formas de seleccionar las 5 posiciones donde irán los ceros.
  - Elegimos una cadena de 2 bits cuyo producto sea 0: hay 3 por cada una de las anteriores.

  Como las palabras 10 bits construidas en este proceso son distintas, por el principio de multiplicación $|A| = \binom{8}{5} \cdot 3$.
- Para B se procede análogamente y se tiene que $|B| = \binom{8}{6} \cdot 3$.

Total:

$$|A \cup B| = 3\left(\binom{8}{5} + \binom{8}{6}\right) = 3\binom{9}{6} = 3\frac{9!}{6!3!} = \frac{9!}{6!2!} = 9 \cdot 4 \cdot 7 = 252$$

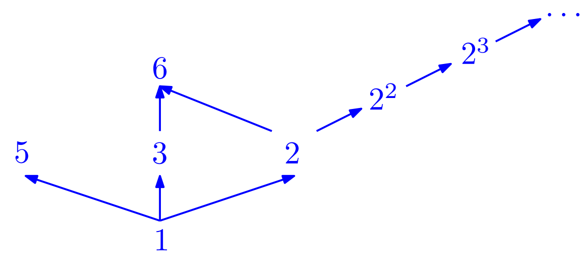
Ejercicio 8. Se considera la relación de divisibilidad en $A = \{3, 5, 6\} \cup \{2^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Dibujar el diagrama de Hasse de $(A, |\,)$.

b) Calcular los elementos notables.

c) Añadir a A un elemento $x \in \mathbb{N}$ tal que el nuevo conjunto tenga un único maximal.

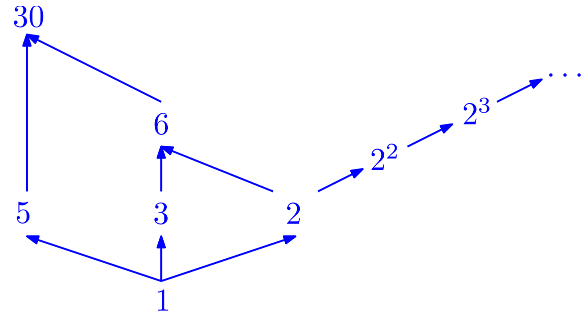
a) El diagrama de Hasse tiene una cadena infinita con las potencias de 2: $2^0 \to 2^1 \to 2^2 \to \cdots$



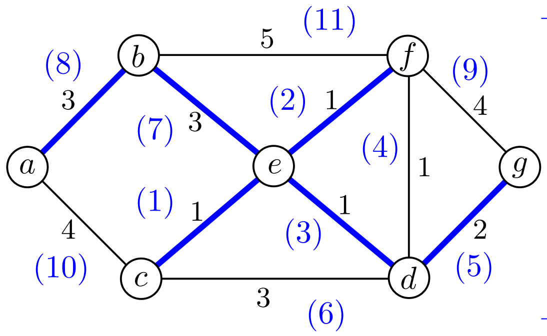
b) Maximales: 6 y 5 ya que sólo se dividen a sí mismos dentro de A. Como hay más de un maximal, no hay máximo.

Minimales: 1 y es mínimo ya que todos los elementos de A son divisibles por 1.

c) Basta tomar un múltiplo común de los dos maximales, por ejemplo $x = 30$. Así $A \cup \{30\}$ solo tiene a 30 como maximal.



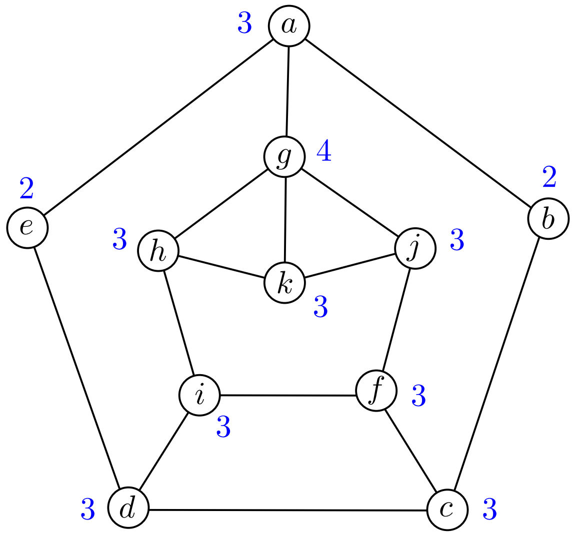
Ejercicio 9. Aplicar el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol recubridor de peso mínimo del grafo de la figura y dar su peso. Indicar brevemente los pasos seguidos.



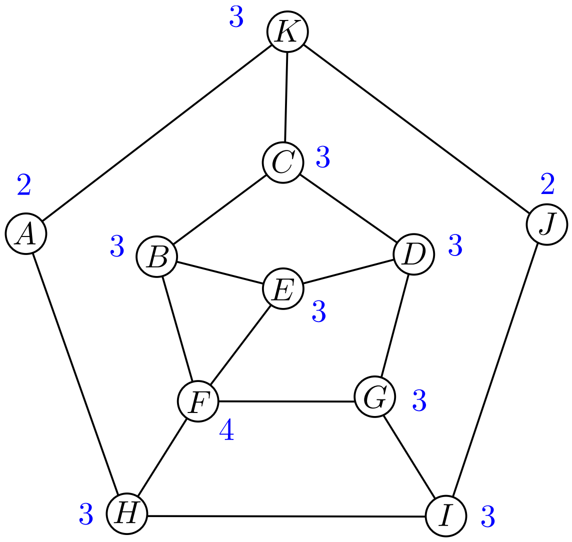
1. Ordenamos las aristas por peso en orden creciente.
2. Inicializamos el grafo de salida T como el bosque con solo los vértices del grafo.
3. Añadimos a T, una a una, las aristas de menor peso en la lista que no formen ciclo con las ya añadidas hasta tener $n - 1 = 7 - 1 = 6$ aristas.

El peso del árbol recubridor de peso mínimo es $w(T) = 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 11$.

Ejercicio 10. Estudiar si los siguientes grafos son isomorfos.

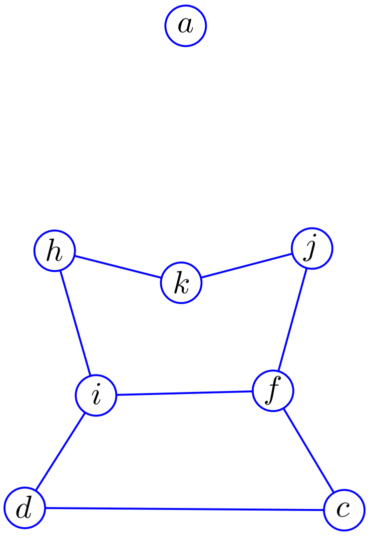


S

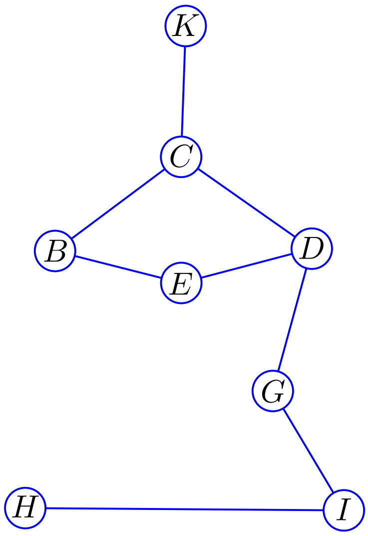


T

No lo son porque si lo fueran, también deberían serlo los subgrafos inducidos por los vértices de grado 3 en cada grafo:



$S_1 = \langle \text{vértices de grado 3} \rangle_S$



$T_1 = \langle \text{vértices de grado 3} \rangle_T$

Pero no lo son porque, en particular, en S_1 hay un vértice de grado 0 y en T_1 no.

Lógica y Matemática Discreta Final de enero 11/1/2016

EU Informática
UPM

Notas:

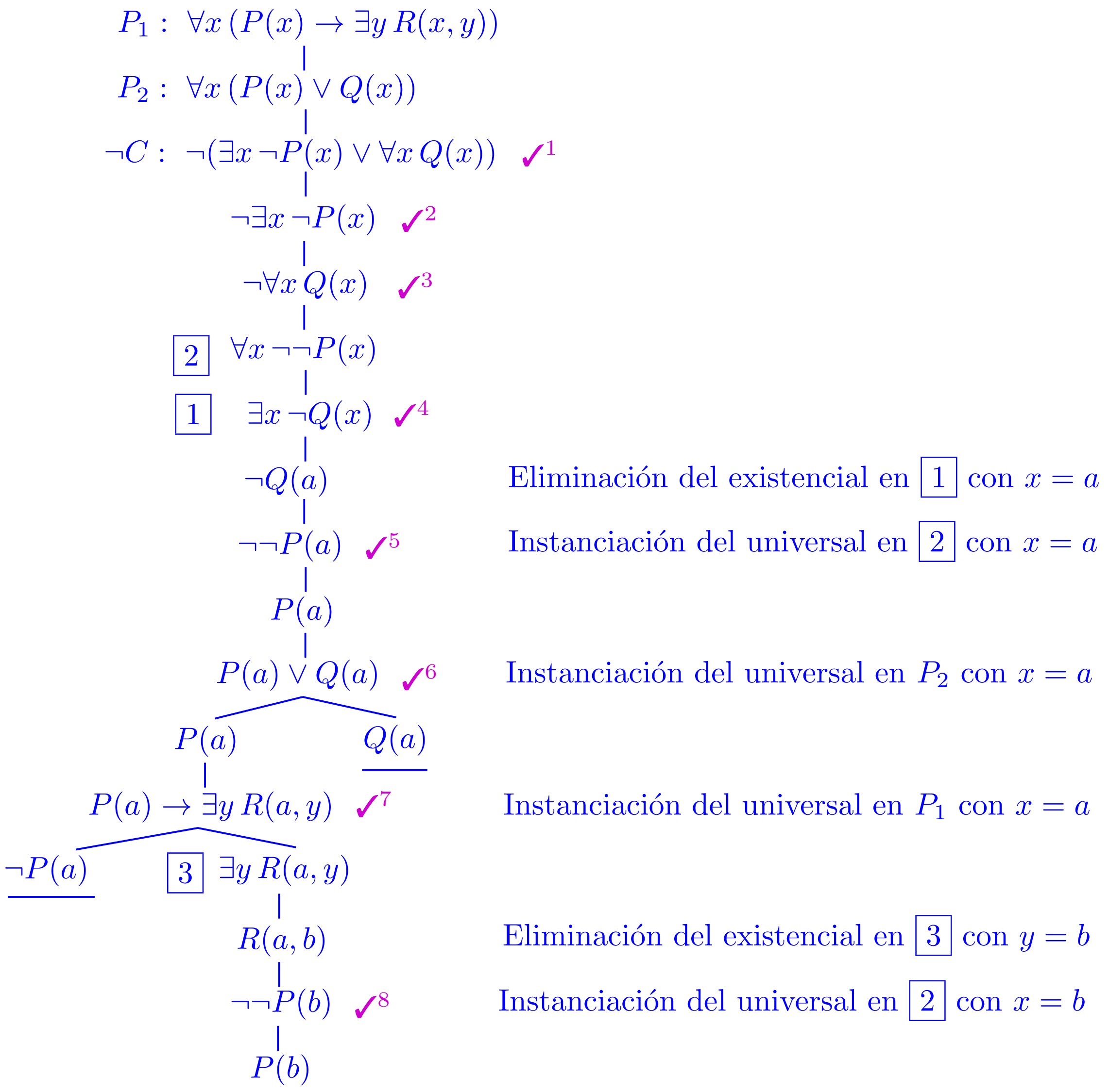
- La parte de elaborados del examen vale el 40 % de la nota total.
- Tiempo para esta parte del examen: **2 horas**.
- **Justificar todas las respuestas**.

Problema 1 (12 %)

La siguiente estructura deductiva es incorrecta. Utilizar el método del tableau para construir un contraejemplo.

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\, R(x,y)),\;\; \forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \quad \Rightarrow \quad \exists x\, \neg P(x) \lor \forall x\, Q(x)$$

Solución: Realizamos un tableau del conjunto de fórmulas formado por las premisas (P_1, P_2) y la negación de la conclusión ($\neg C$):



$P_1 : \forall x\,(P(x) \to \exists y\, R(x,y))$

$P_2 : \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$

$\neg C : \neg(\exists x\, \neg P(x) \lor \forall x\, Q(x))$ $\checkmark^1$

$\neg\exists x\, \neg P(x)$ $\checkmark^2$

$\neg\forall x\, Q(x)$ $\checkmark^3$

$\boxed{2}$ $\forall x\, \neg\neg P(x)$

$\boxed{1}$ $\exists x\, \neg Q(x)$ $\checkmark^4$

$\neg Q(a)$ Eliminación del existencial en $\boxed{1}$ con $x = a$

$\neg\neg P(a)$ $\checkmark^5$ Instanciación del universal en $\boxed{2}$ con $x = a$

$P(a)$

$P(a) \lor Q(a)$ $\checkmark^6$ Instanciación del universal en P_2 con $x = a$

$P(a)$ | $\underline{Q(a)}$

$P(a) \to \exists y\, R(a,y)$ $\checkmark^7$ Instanciación del universal en P_1 con $x = a$

$\underline{\neg P(a)}$ | $\boxed{3}$ $\exists y\, R(a,y)$

$R(a,b)$ Eliminación del existencial en $\boxed{3}$ con $y = b$

$\neg\neg P(b)$ $\checkmark^8$ Instanciación del universal en $\boxed{2}$ con $x = b$

$P(b)$

Queda una rama no cerrada en el tableau tras el desarrollo de todas las fórmulas desarrollables, simplificación de las simplificables, eliminación de los existenciales e instanciación de los universales en todos los valores de las variables que han aparecido, en las fórmulas que contiene dicha rama. Esta rama nos permite construir un contraejemplo de la estructura deductiva dada: la interpretación I con dominio $D = \{d_1, d_2\}$ y funciones booleanas asociadas a los predicados $P, Q : D \to \{0,1\}, \quad R : D \times D \to \{0,1\}$ tales que

$$\begin{array}{rclcrclcrcl|rcl}
P(d_1) & = & 1 & & Q(d_1) & = & 0 & & R(d_1,d_1) & = & 0 & R(d_1,d_2) & = & 1 \\
P(d_2) & = & 1 & & Q(d_2) & = & 0 & & R(d_2,d_1) & = & 1 & R(d_2,d_2) & = & 0
\end{array}$$

En efecto, comprobamos que la interpretación dada es modelo de las premisas, P_1 y P_2, pero no es modelo de la conclusión C.

- $V_I(P_1) = 1$ ya que $P(d_1) = 1,\ R(d_1,d_2) = 1$, luego $V_I(P(d_1) \to \exists y R(d_1,y)) = 1$; y $P(d_2) = 1,\ R(d_2,d_1) = 1$, luego $V_I\big(P(d_2) \to \exists y R(d_2,y)\big) = 1$.
- $V_I(P_2) = 1$ ya que $P(d_1) = P(d_2) = 1$.
- $V_I(C) = 0$, ya que $V_I\big(\exists x \neg P(x)\big) = 0$ y $V_I\big(\forall x\, Q(x)\big) = 0$.

Problema 2 (12 %)

a) *(5 puntos)* Construir una función $f : \mathbb{N}^* \times \text{LIST}_P(\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{LIST}(\mathbb{Z})$ tal que $f(n, L)$ es la lista que se obtiene al poner el n-ésimo elemento de L entre corchetes y dejar los demás tal cual. Si la lista L no tiene elemento n-ésimo, añade la lista [ ] al final.

Por ejemplo, $f\big(3, [7, 8, 5, 2]\big) = \big[7, 8, [5], 2\big]$ y $f\big(4, [2, 1]\big) = \big[2, 1, [\ ]\big]$.

Solución: Buscamos primero la regla recursiva.
Tomemos una lista plana genérica $L = [a_1, \ldots, a_m]$ de longitud $m \geq 0$ y un $n \geq 1$. Para hallar $f(n, L)$ hay que distinguir dos casos, tal y como nos dicen: si $n \leq m$ y si $n > m$.

1. $f(n, L) \underset{n>m}{=} f(n, [a_1, \ldots, a_m]) = \big[a_1, \ldots, a_m, [\,]\big] = [a_1, \ldots, a_m] \parallel \big[[\,]\big] = L \parallel \big[[\,]\big]$.

Esta regla no es recursiva.

2.
$$\begin{aligned} f(n, L) \underset{n\leq m}{=} f(n, [a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m]) &= \big[a_1, a_2, \ldots, [a_n], a_{n+1}, \ldots, a_m\big] = \\ &= \underbrace{[a_1]}_{[\text{CAB}(L)]} \parallel \underbrace{\big[a_2, \ldots, [a_n], a_{n+1}, \ldots, a_m\big]}_{f\left(n-1,\text{RESTO}(L)\right)}. \end{aligned}$$

Aquí tenemos una regla recursiva:

$$f(n, L) = [\text{CAB}(L)] \parallel f\big(n - 1, \text{RESTO}(L)\big)$$

que solo tiene sentido aplicarse si $n - 1 \geq 1$ y existe $\text{RESTO}(L)$, es decir, para $n \geq 2$ y $L \neq [\,]$.

Por ello son necesarias dos reglas básicas para cerrar la recursividad: cuando $n = 1$ y cuando $L = [\,]$.

- Si $L = [\,]$, estamos en el caso 1 en el que $n > m$, ya que $n \geq 1$ y $m = 0$. Por tanto
$$f(n, [\,]) = [\,] \parallel \big[[\,]\big] = \big[[\,]\big]$$
- Si $n = 1$, y $L \neq [\,]$, tal y como analizamos en el caso 2,
$$f(1, L) = f(1, [a_1, a_2 \ldots, a_m]) = \big[[a_1], a_2, \ldots, a_m\big] = \big[[a_1]\big] \parallel [a_2, \ldots, a_m]$$
Si esto lo expresamos en términos de las funciones cabeza y resto queda:
$$f(1, L) = \big[[\text{CAB}(L)]\big] \parallel \text{RESTO}(L)$$

Así pues, la función pedida queda definida recursivamente del siguiente modo:

$$f(n, L) = \begin{cases} \big[[\,]\big] & \text{si } L = [\,] \text{ y } n \geq 1 \quad (\text{RB1}) \\ \big[[\text{CAB}(L)]\big] \parallel \text{RESTO}(L) & \text{si } L \neq [\,] \text{ y } n = 1 \quad (\text{RB2}) \\ \big[\text{CAB}(L)\big] \parallel f\big(n - 1, \text{RESTO}(L)\big) & \text{si } L \neq [\,] \text{ y } n > 1 \quad (\text{RR}) \end{cases}$$

b) *(3 puntos)* Evaluar detalladamente $f\big(3,[7,8,5,2]\big)$ y $f\big(4,[2,1]\big)$ siguiendo el esquema recursivo propuesto. Hallar los árboles de dependencia $T_f\big(3,[7,8,5,2]\big)$ y $T_f\big(4,[2,1]\big)$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
f\big(3,[7,8,5,2]\big) \underset{RR}{=} [7] \parallel f\big(2,[8,5,2]\big) & & = [7] \parallel \big[8,[5],2\big] = \big[7,8,[5],2\big] \\
f\big(2,[8,5,2]\big) \underset{RR}{=} [8] \parallel f\big(1,[5,2]\big) & = [8] \parallel \big[[5],2\big] = \big[8,[5],2\big] \arrow[ur] & \\
f\big(1,[5,2]\big) \underset{RB_2}{=} \big[[5]\big] \parallel [2] = \big[[5],2\big] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
f\big(4,[2,1]\big) \underset{RR}{=} [2] \parallel f\big(3,[1]\big) & & = [2] \parallel \big[1,[\,]\big] = \big[2,1,[\,]\big] \\
f\big(2,[1]\big) \underset{RR}{=} [1] \parallel f\big(2,[\,]\big) & = [1] \parallel \big[[\,]\big] = \big[1,[\,]\big] \arrow[ur] & \\
f\big(1,[\,]\big) \underset{RB_1}{=} \big[[\,]\big] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Los árboles de dependencia son:

$$\begin{tikzcd}
T_f\big(3,[7,8,5,2]\big) = & \big(3,[7,8,5,2]\big) \arrow[d] & & T_f\big(4,[2,1]\big) = & \big(4,[2,1]\big) \arrow[d] \\
& \big(2,[8,5,2]\big) \arrow[d] & & & \big(3,[1]\big) \arrow[d] \\
& \big(1,[5,2]\big) & & & \big(2,[\,]\big)
\end{tikzcd}$$

c) *(2 puntos)* Hallar el conjunto de partida de f.

SOLUCIÓN: En el conjunto de partida están los elementos del conjunto inicial para los que la función está definida de modo explícito. En este caso hay dos reglas básicas y el conjunto es:

$$CP_{\ f} = \big\{(n,[\,])\ /\ n \in \mathbb{N}^*\big\} \cup \big\{(1,L)\ /\ L \neq [\,]\big\} = \big\{(n,L)\ /\ L = [\,] \text{ o bien } n = 1\big\}$$

Problema 3 (8 %)

Sea A el conjunto de las palabras con 6 caracteres en las que el primero es una de las letras del conjunto $\{a, b, c\}$ y los 5 caracteres restantes son bits:

$$A = \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \;/\; x_1 \in \{a, b, c\},\; x_i \in \{0, 1\},\; \forall i \neq 1\}$$

a) *(2 puntos)* ¿Cuántos elementos tiene A? ¿Cuántos elementos de A tienen exactamente 3 unos?

SOLUCIÓN: Construimos las palabras de A mediante un proceso de dos pasos:

Paso 1: Elegir el primer elemento. Este puede tomar 3 valores distintos.

Paso 2: Elegir los 5 bits. Obviamente, 0 o 1 se tiene que repetir y al cambiar el orden de los bits las cadenas son diferentes. Por tanto, se trata de variaciones con repetición y hay $VR(2, 5) = 2^5$ por cada una de las anteriores.

Puede aplicarse el Principio de Multiplicación pues todos los resultados son distintos, ya que o bien se elige una letra distinta o bien la cadena de 5 bits es distinta. Así,

$$|A| = 3 \cdot 2^5 = 96$$

- Si un elemento de A tiene exactamente 3 unos, entonces el número de ceros que tiene es exacta-mente 2 y, por tanto, en este caso, en el paso 2 las cadenas de bits son permutaciones con repetición donde hay 3 elementos indistinguibles y otros 2 elementos también indistinguibles. Su número es:

$$PR(5; 3, 2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \quad \text{por cada una de las anteriores.}$$

Y otra vez por el Principio de Multiplicación, el número de elementos de A con exactamente 3 unos es:

$$3 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}!}{\cancel{3}! \cdot 2!} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

b) En A se define la relación de equivalencia R:

$$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \;\; R \;\; y_1\,y_2\,y_3\,y_4\,y_5\,y_6 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_1 = y_1 \\ \text{y} \\ x_5 - x_6 = y_5 - y_6 \end{array} \right.$$

1. *(2 puntos)* Describir la clase de $b\,00000$ y hallar su cardinal.

SOLUCIÓN: La clase de $b\,00000$ es:

$$\begin{aligned} \overline{b\,00000} &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \;R\; b\,00000\} = \\ &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1 = b,\;\; x_5 - x_6 = 0\} = \\ &= \big\{b\,x_2\,x_3\,x_4\,00 \;/\; x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\big\} \cup \big\{b\,x_2\,x_3\,x_4\,11 \;/\; x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\big\} \end{aligned}$$

Entonces, el cardinal de $\overline{b\,00000}$ se puede obtener, por el Principio de Adición, como la suma de los cardinales de estos dos conjuntos que son disjuntos.

El cardinal de ambos conjuntos coincide con $VR(2, 3) = 2^3$ y, por tanto, $|\overline{b\,00000}| = 2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4$.

2. *(2 puntos)* Dar un elemento del conjunto A que empiece por b y no esté en la clase de $b\,00000$. Describir su clase.

Solución: Por ejemplo, $b\,00010 \not R\, b00000$ pues $1-0=1\neq 0=0-0$.

$$\begin{aligned}\overline{b\,00010} &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \;R\; b\,00010\} = \\ &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1=b,\;\; x_5-x_6=1\} = \\ &= \big\{b\,x_2\,x_3\,x_4\,10 \;/\; x_2,x_3,x_4 \in \{0,1\}\big\}\end{aligned}$$

3. *(4 puntos)* Analizar cuántas clases diferentes hay, hallar el cardinal de cada clase y dar el conjunto cociente.

Solución: Es fácil ver que, $|\overline{b\,00010}| = VR(2,3)=2^3$ y todavía empezando por b hay elementos que no están en estas dos clases, todos los que acaban en 01, pues en este caso la diferencia es -1:

$$\begin{aligned}\overline{b\,00001} &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \;R\; b\,00001\} = \\ &= \{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A \;/\; x_1=b,\;\; x_5-x_6=-1\} = \\ &= \big\{b\,x_2\,x_3\,x_4\,01 \;/\; x_2,x_3,x_4 \in \{0,1\}\big\}\end{aligned}$$

y de nuevo $|\overline{b\,00001}| = VR(2,3)=2^3$.

Entonces,

$$|\overline{b\,00000}|+|\overline{b\,00001}|+|\overline{b\,00001}| = 2^4+2^3+2^3 = 2\cdot 2^3+2^3+2^3 = 4\cdot 2^3 = 2^5 < |A| = 3\cdot 2^5$$

Ya están en alguna clase todos los que empiezan por b pues los únicos valores posibles de x_5-x_6 son $0,1$ y -1 pero faltan por considerar las clases de equivalencia de los elementos de A que comienzan por a o bien por c.

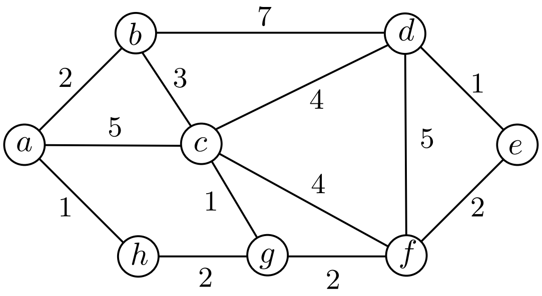
Se verifica que hay otras tres clases empezando por a y otras tres empezando por c, análogas a las anteriores. Y cada una de ellas tiene el mismo cardinal que la correspondiente que empieza por b.
Y ahora sí cada uno de los $3\cdot 2^5 = 96$ elementos de A está en alguna clase descrita y, por tanto, el conjunto cociente es:

$$\begin{aligned}A/R &\underset{\text{definición}}{=} \{\overline{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6} \;/\; x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \in A\} = \\ &= \big\{\overline{x_1 00000},\; \overline{x_1 00010},\; \overline{x_1 00001} \;/\; x_1 \in \{a,b,c\}\big\} = \\ &= \big\{\overline{x_1 00000} \;/\; x_1 \in \{a,b,c\}\big\} \cup \big\{\overline{x_1 00010} \;/\; x_1 \in \{a,b,c\}\big\} \cup \\ &\qquad \cup \big\{\overline{x_1 00001} \;/\; x_1 \in \{a,b,c\}\big\}\end{aligned}$$

Su cardinal es $|A/R| = 9$.

Problema 4 (8 %)

Una empresa ha puesto a la venta 8 artículos, cada uno en una página distinta de cierta tienda web. En el grafo de la figura los vértices representan las páginas de los artículos y el peso de la arista que une 2 artículos, el número de clics que hacen falta para acceder directamente del uno al otro.



	a	b	c	d	e	f	g	h
a								
b		0	3	7	8	6	4	3
c		3	0	4	5	3	1	3
d		7	4	0	1	3	5	7
e		8	5	1	0	2	4	6
f		6	3	3	2	0	2	4
g		4	1	5	4	2	0	2
h		3	3	7	6	4	2	0

a) *(2 puntos)* Los datos de la tabla representan el mínimo número de clics necesarios para pasar de un artículo a otro, pasando solo por páginas (artículos) de la empresa. ¿Cuántos clics son necesarios para pasar del artículo a a cada uno de otros artículos?

SOLUCIÓN: Si la suma de los pesos de las aristas de un camino que lleva de una página a otra representa el número de clics para pasar de una a otra siguiendo ese camino, lo que se pregunta es el mínimo número de clics necesario para ir desde el vértice a a los demás, es decir, la distancia desde a al resto.
Estas distancias desde a se hallan con el algoritmo de Dijkstra:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	2	5	∞	∞	∞	∞	1
h	–	2	5	∞	∞	∞	3	–
b	–	–	5	9	∞	∞	3	–
g	–	–	4	9	∞	5	–	–
c	–	–	–	8	∞	5	–	–
f	–	–	–	8	7	–	–	–
e	–	–	–	8	–	–	–	–
d	–	–	–	–	–	–	–	–

Luego

	a	b	c	d	e	f	g	h
$d(a,\cdot)$	0	2	4	8	7	5	3	1

b) *(2 puntos)* ¿Cuál es el número máximo de clics entre dos páginas cualesquiera de la empresa? ¿En qué par (o pares) de artículos se alcanza?

SOLUCIÓN: Yendo por el camino más corto (con el menor número de clics) de una página a otra, lo que se pide es hallar la distancia máxima entre dos vértices del grafo. Es decir, el mayor de los radios de los vértices del grafo. Para hallarlo se puede usar la tabla de distancias dada completándola con los datos obtenidos en el apartado anterior. Se trata de hallar el vértice x tal que $R(x)$ sea máximo.

$d(\cdot,\cdot)$	a	b	c	d	e	f	g	h	$R(\cdot)$
a	0	2	4	8	7	5	3	1	8
b	2	0	3	7	8	6	4	3	8
c	4	3	0	4	5	3	1	3	5
d	8	7	4	0	1	3	5	7	8
e	7	8	5	1	0	2	4	6	8
f	5	6	3	3	2	0	2	4	6
g	3	4	1	5	4	2	0	2	5
h	1	3	3	7	6	4	2	0	7

Luego la distancia máxima entre vértices es 8 y se alcanza entre los pares: a y d, b y e.

c) *(2 puntos)* En la página de uno de los artículos se quiere volcar, además, la información administrativa de la empresa de modo que desde las otras páginas se pueda acceder a ella de la forma más rápida posible (mínimo número de clics). Elegir la página más conveniente para hacerlo.

SOLUCIÓN: El lugar más conveniente será el vértice que minimice la distancia al más alejado. Así que en la tabla del apartado anterior buscamos el vértice x tal que $R(x)$ sea mínimo. Tal valor, el radio del grafo, es 5 y se alcanza en los vértices c y g. Cualquiera de ellos satisface las condiciones pedidas.

d) *(2 puntos)* Se quiere poner una página de control para actualizar los artículos alojados en e, f, g y h. ¿Dónde se debería poner si desde ésta hay que ir accediendo a cada una de las otras, de una en una y volviendo a la de control antes de acceder a la siguiente?

SOLUCIÓN: Si la página de control se ubica en el vértice x, el recorrido habitual para actualizar los artículos alojados en vértices mencionados será, por supuesto siguiendo un camino mínimo desde x a cada uno de ellos y el total de clics será

$$2(d(x,e)+d(x,f)+d(x,g)+d(x,h)) = 2S(x)$$

Por tanto el mejor lugar para ubicar la página de control es el vértice que minimice la suma anterior, o lo que es lo mismo, que minimice su mitad: $S(x)$. Para hallarlo usamos las filas correspondientes a los vértices e, f, g y h en la tabla de distancias.

$d(\cdot,\cdot)$	a	b	c	d	e	f	g	h
e	7	8	5	1	0	2	4	6
f	5	6	3	3	2	0	2	4
g	3	4	1	5	4	2	0	2
h	1	3	3	7	6	4	2	0
$S(\cdot)$	16	21	12	16	12	8	8	12

Luego los vértices ideales para ubicar la página de control son f y g.

e) *(2 puntos)* ¿Puede un cliente consultar todas las páginas de la empresa sin visitar dos veces la misma y volver a la página de inicio?

SOLUCIÓN: Sí, porque este grafo es hamiltoniano. Un ciclo hamiltoniano que permite recorrer todas las páginas y volver a la de inicio sin repetir ninguna intermedia es:

$a, b, c, d, e, f, g, h, a$