Apellidos: Nombre:

Examen I-A,C (28 de Marzo de 2012)

Parte 1ª: Cuestiones (2 puntos)

1. (0.5 puntos) Sea una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple $a_n \leq a_{n+1}$ y $a_n \leq 1$. ¿Converge dicha sucesión? Sí. ¿Por qué? La sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente.

2. (0.5 puntos) Si una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifica que $\dfrac{1}{6n} \leq a_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ porque se puede aplicar la regla del sandwich, siendo $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{6n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ pues $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

3. (0.5 puntos) Una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ¿converge? Sí.

   ¿Por qué? Por el criterio de comparación de Gauss, ya que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ es convergente pues es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$, con $|r| < 1$.

4. (0.5 puntos) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+1}$, ¿converge? No. ¿Por qué? No se satisface la condición necesaria de convergencia ya que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+1} = 1 \neq 0$.

Parte 2ª: Problemas (8 puntos)

1. (2 puntos) Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^3+n^2}{n^3+4}\right)^{2n} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}\operatorname{sen}(n+1)$$

   Solución

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^3+n^2}{n^3+4}\right)^{2n} \underset{1^{\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty} e^{2n\left(\frac{n^3+n^2}{n^3+4}-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{2n^3-8n}{n^3+4}\right)} = e^2.$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}\operatorname{sen}(n+1) = 0$ porque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ ya que $n! \ll n^n$ y la sucesión $\{a_n\}$ con $a_n = \operatorname{sen}(n+1)$ está acotada pues $|a_n| \leq 1$.

2. (1 punto) Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7n^3}{(-5)^n}$.

   Solución Sea $a_n = \dfrac{7n^3}{(-5)^n}$.

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente pues $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{7}(\sqrt[n]{n})^3}{5} = \dfrac{1\cdot 1}{5} = \dfrac{1}{5} < 1.$

Entonces, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y, por tanto, converge.

3. Sea la serie de potencias $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{(n+2)(n+4)\,3^n}$. Se pide:

   a) (1 punto) Determinar el radio y el campo de convergencia de la serie de potencias.

   b) (1 punto) Calcular, si es posible, la suma de la serie cuando $x = 4$.

Solución

a) Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$, donde $a_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+4)\,3^n}$.
Se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(n+2)(n+4)}{(n+3)(n+5)} \cdot \dfrac{1}{3}\right) = 1 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}.$
Entonces, el radio de convergencia de la serie de potencias es $r = 3$. Por tanto, la serie converge absolutamente en $(-2, 4)$ y no converge en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(4, +\infty)$.
Si $x = 4$ se obtiene la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+4)}$. Sean $b_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+4)}$ y $c_n = \dfrac{1}{n^2}$. Puesto que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{c_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{(n+2)(n+4)} = 1$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (serie armónica generalizada con $p = 2 > 1$) es una serie convergente, aplicando el criterio de comparación en el límite se obtiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.
Si $x = -2$ resulta la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+2)(n+4)}$, que es una serie absolutamente convergente por el análisis realizado en el párrafo anterior.
Por tanto, el campo de convergencia de la serie de potencias es $[-2, 4]$.

b) Teniendo en cuenta el apartado *a*), la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+4)}$ es convergente.
A continuación se obtiene la expresión de la suma parcial n-ésima S_n.
Se verifica $\dfrac{1}{(n+2)(n+4)} = \dfrac{1/2}{n+2} + \dfrac{-1/2}{n+4}$ y, así,

$$
\begin{aligned}
S_n =& \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1/2}{k+2} + \frac{-1/2}{k+4}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+4} \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{n+2}\right) \\
& -\frac{1}{2}\left(\qquad\qquad \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right).
\end{aligned}
$$

Entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{7}{24}$, luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+4)} = \dfrac{7}{24}.$

4. (1 punto) Determinar las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ para los valores $c = 0$ y $c = 1$.

   Solución Las curvas de nivel c tienen por ecuación $f(x,y) = c$, es decir, $x^2 + y^2 - 2x = c$ o, en forma equivalente, $(x-1)^2 + y^2 = c + 1$.

   Si $c = 0$ la curva de nivel es $(x-1)^2 + y^2 = 1$, circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1.

   Si $c = 1$ la curva de nivel es $(x-1)^2 + y^2 = 2$, circunferencia de centro $(1,0)$ y radio $\sqrt{2}$.

5. (2 puntos) Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x^3 - (y-1)^3}{x^2 + (y-1)^2} \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x}$$

   Solución

   a) Considerando $f(x,y) = \dfrac{2x^3 - (y-1)^3}{x^2 + (y-1)^2}$ y utilizando coordenadas polares con origen en el punto $(0,1)$,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

   se tiene $f(r\cos\theta, 1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \dfrac{r^3\left(2\cos^3\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta\right)}{r^2} = r\left(2\cos^3\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta\right)$.
   Entonces, denotando $g_1(r) = r$ y $g_2(\theta) = 2\cos^3\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta$ se verifica que $\lim\limits_{r\to 0} g_1(r) = 0$ y g_2 es acotada para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x^3 - (y-1)^3}{x^2 + (y-1)^2} = 0.$$

   b) Se calculan los límites relativos a los subconjuntos $\Gamma_m = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = mx\right\}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Gamma_m}} \frac{x-y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - mx}{x} = 1 - m.$$

   Puesto que dependen de la pendiente m, es posible encontrar dos subconjuntos tales que los límites relativos correspondientes son distintos. Por ejemplo,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y = x}} \frac{x-y}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y = -x}} \frac{x-y}{x} = 2.$$

   Por tanto, no existe el límite doble.