EXAMEN TDS - FEB 2011

PROBLEMA 2

El sistema tiene dos ceros en $\pm j\,1/2$ y un polo en 1.

Además el sistema podría tener polos o ceros en ∞

Con estos datos la expresión algebraica de $H(z)$ puede ser

$$H(z) = \underbrace{K}_{\text{Factor de ganancia no determinado por polos y ceros}} \cdot \underbrace{\frac{\left(z-\frac{1}{2}j\right)\left(z+\frac{1}{2}j\right)}{(z-1)}}_{\text{Ceros y polos finitos}} \cdot \underbrace{z^r}_{\text{Posibles polos o ceros en } \infty}$$

Se sabe además que $\lim_{z\to\infty} \frac{H(z)}{z} = 2$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{H(z)}{z} = \lim_{z\to\infty} K \cdot \frac{\left(z-\frac{1}{2}j\right)\left(z+\frac{1}{2}j\right)}{(z-1)\cdot z} \cdot z^r =$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } r>0 \\ K & \text{si } r=0 \\ 0 & \text{si } r<0 \end{cases}$$

Como $\lim_{z\to\infty} \frac{H(z)}{z} = 2$, la única opción posible es

$r=0$ y $K=2$, por tanto $H(z)$ queda:

EXAMEN TDS - FEB 2011

$$H(z) = 2 \cdot \frac{\left(z - \frac{1}{2}j\right)\left(z + \frac{1}{2}j\right)}{z-1} =$$

$$= 2 \; \frac{\left(1 - \frac{1}{2}j z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}j z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right) z^{-1}} =$$

$$= 2 \; \frac{1 + \frac{1}{4} z^{-2}}{z^{-1} - z^{-2}}$$

Nos falta encontrar la ROC asociada al sistema. Para ello calculamos las transformadas inversas asociadas a las dos posibles ROCs:

Posibles ROC: $|z| < 1$, $1 < |z| < \infty$

NOTA: En ∞ hay un polo ya que

$$\lim_{z \to \infty} H(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{2\left(z - \frac{1}{2}j\right)\left(z + \frac{1}{2}j\right)}{z-1} =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{2z^2}{z} = \lim_{z \to \infty} 2z = \infty$$

Calculamos la respuesta al impulso asociada a cada ROC:

$\boxed{1 < |z| < \infty}$:

$$H(z) = \frac{2 + \frac{1}{2} z^{-2}}{z^{-1}(1 - z^{-1})} = \frac{2z}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$h_1[n] = 2\, u[n+1] + \frac{1}{2}\, u[n-1]$$

Comprobamos si se cumple $h_1[0] = 2$:

$$h_1[0] = 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2$$

Se cumple así que este sistema es válido con las condiciones dadas y podría ser la ROC $1<|z|<\infty$

Veamos si ocurre lo mismo con la otra ROC:

$\boxed{|z| < 1}$:

$$h_2[n] = -2 \cdot u[-(n+1)-1] - \frac{1}{2}\, u[-(n-1)-1] =$$

$$= -2 \cdot u[-n-2] - \frac{1}{2}\, u[-n]$$

Comprobamos si se cumple $h_2[0] = 2$:

$$h_2[0] = -2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \neq 2$$

Esta ROC no es válida

La ROC del sistema es por tanto:

$$\boxed{1 < |z| < \infty}$$

b) Ya hemos obtenido $h[n]$ en el apartado anterior:

$$\boxed{h[n] = h_1[n] = 2\,u[n+1] + \frac{1}{2}\,u[n-1]}$$

La ecuación en diferencias la obtenemos a partir de $H(z)$.

$$H(z) = \frac{2 + \frac{1}{2} z^{-2}}{z^{-1} - z^{-2}} = \frac{2z + \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

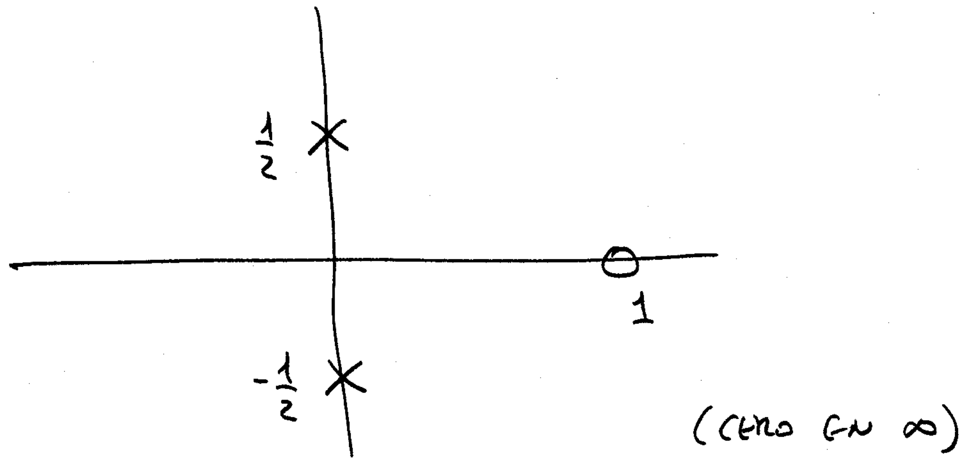
$$\boxed{y[n] - y[n-1] = 2x[n+1] + \frac{1}{2}\,x[n-1]}$$

c) El sistema no es estable por tener un polo en la circunferencia unidad.

El sistema no es causal porque a pesar de tener ROC con forma de plano menos círculo tiene un polo en ∞. También se puede apreciar en la ecuación en diferencias que la salida en n depende de entradas futuras ($x[n+1]$).

No es de fase mínima por tener un polo en la circunferencia unidad y no dentro de la misma.

d) El diagrama de polos y ceros del sistema inverso es:



Las posibles ROC de este diagrama son:

$|z| < \frac{1}{2}$: No da lugar a un sistema inverso del anterior porque no tiene intersección con la ROC del sistema directo, así que no es una ROC válida del sistema inverso.

$|z| > \frac{1}{2}$: Tiene intersección no nula con la ROC del sistema directo y por tanto es una ROC válida del sistema inverso.

Sólo hay un sistema inverso, el correspondiente a la ROC $|z| > 1/2$.