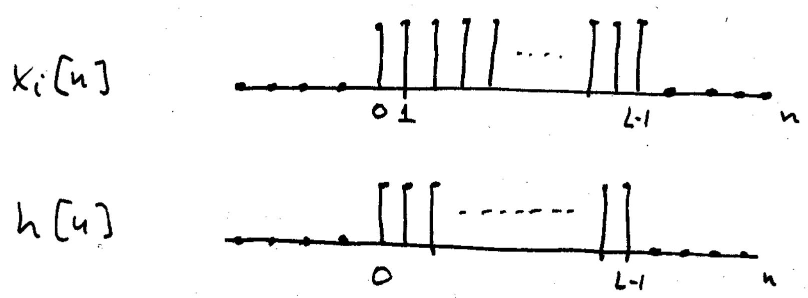
EXAMEN TDS SEPT 08 – PROBLEMAS.

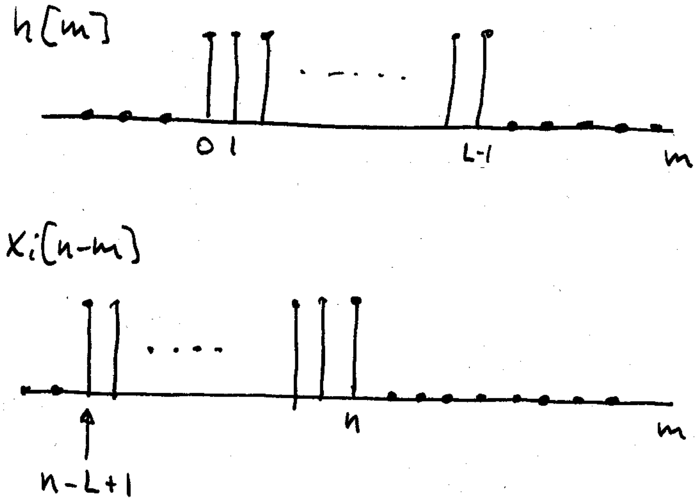
PROBLEMA 1 (1)



a) Aplicando la fórmula de la convolución lineal directamente

$$x_i[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot x_i[n-m]$$

Dibujamos $h[m]$ y $x_i[n-m]$ en función de m para comprobar en cuantas muestras se solapan en función de n.



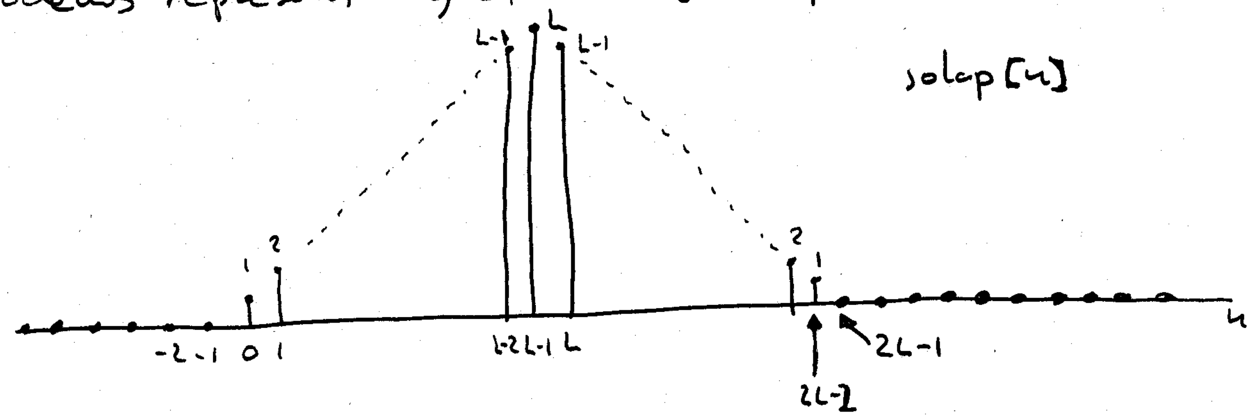
Ahora, variando n entre $-\infty$ e ∞ podemos calcular el número de muestras de solapamiento entre $h[m]$ y $x_i[n-m]$, que será igual al número de multiplicaciones reales a realizar para calcular $x_i[n] * h[n]$ para un n dado.

PROBLEMA 1 (2)

Si llamamos solap [n] al número de muestras en que se solapan h[m] y x_i[n-m] podemos ver que:

$$\text{solap}[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n<0 \\ n+1 & \text{si } 0 \leq n \leq L-1 \\ L-(n-L+1) = 2L-1-n & \text{si } L-1 < n \leq 2L-2 \\ 0 & \text{si } n > 2L-2 \end{cases}$$

Podemos representar gráficamente solap (n)



Para calcular $x_i[n] * h[n]$ para todos los valores de n necesitaremos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{solap}[n]$$

multiplicaciones reales.

Este sumatorio se puede calcular de forma muy sencilla observando que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{solap}[n] = \sum_{n=0}^{2L-2} \text{solap}[n] = \left(\sum_{n=0}^{L-2} (\text{solap}[n] + \text{solap}[n+L]) \right) +$$

$$+ \text{solap}[L-1] = \left(\sum_{n=0}^{L-2} L \right) + L = (L-1) \cdot L + L = L \cdot L = L^2$$

Se necesitan, por tanto, <u>L^2 multiplicaciones reales</u>

PROBLEMA 1 (3)

Realización del sistema empleando DFTs de N puntos implementadas con FFT

- Coste computacional FFT directa e inversa de N pts: $2N\log_2 N$ multiplicaciones reales.
- La $DFT\{h(n)\} = H[k]$ está precalculada

b) Aplicando el mecanismo de solapamiento y almacenamiento con DFTs de $N = L$ puntos.

En el mecanismo de solapamiento y almacenamiento empleamos DFTs con la misma longitud que el bloque de la señal. Esto tiene el problema de que, al ser la convolución lineal más larga que el número de puntos de la DFT, la convolución circular que se va a obtener va a sufrir solapamiento en el tiempo y solo algunas muestras coincidirán con la lineal.

En nuestro caso:

$h[n]$ es no nula entre 0 y $L-1$

$x_i[n]$ es no nula entre 0 y $L-1$

Al hacer la convolución (circular) entre estas dos señales empleando la DFT

$$h[n] \xrightarrow[\text{(precalc)}]{DFT_N} H[k]$$

$$x_i[n] \xrightarrow{DFT_N} X_i[k]$$

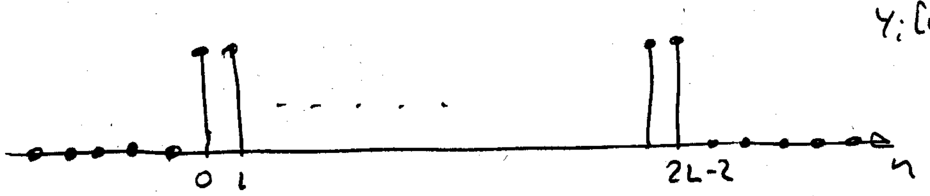
$$H[k] \times X_i[k] \xrightarrow{DFT_N^{-1}} x_i[n] \; N \; h[n]$$

PROBLEMA 1 (4)

Podemos interpretar que la convolución circular es la convolución lineal con solapamiento en el tiempo, por lo que si denominamos

$$y_i[n] = x_i[n] * h[n]$$

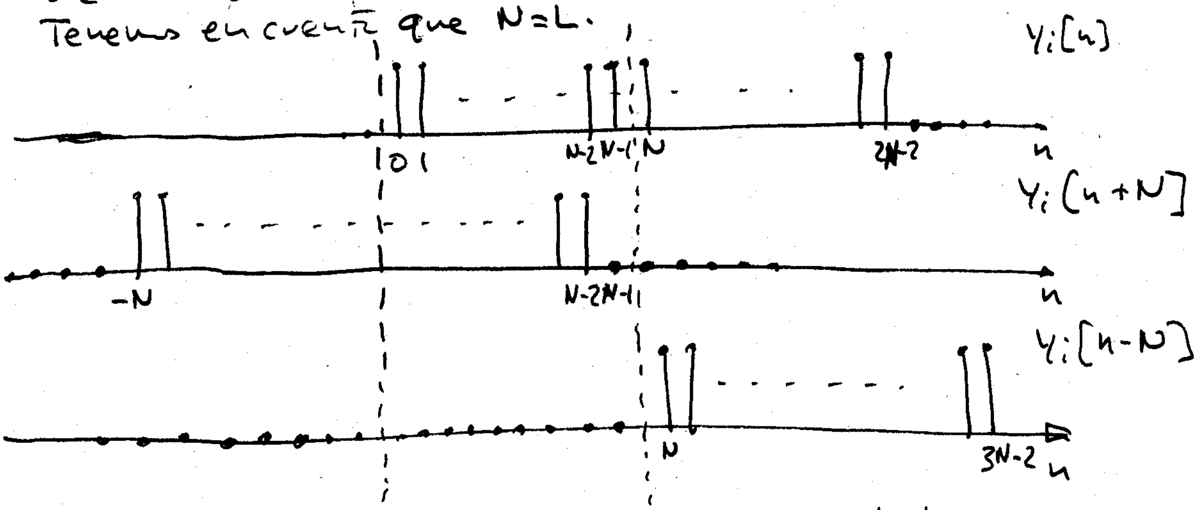
que sabemos que toma valores no nulos entre 0 y 2L-2



La convolución circular la podemos representar como

$$x_i[n] \textcircled{\scriptsize N} h[n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_i[n-rN] & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Representando el sumatorio podemos ver qué muestras de la convolución circular coinciden con la lineal. Tenemos en cuenta que N=L.



Observando lo anterior vemos que sólo hay una muestra, la correspondiente a n=N-1, de la convolución circular que no sufre solapamiento temporal, y que por tanto coincide con el valor de la convolución lineal.

PROBLEMA 1 (5)

(c) Aplicando el mecanismo de solapamiento y suma con DFTs de longitud $N=2L$

$$\begin{tikzcd} h[n] \arrow[r, "DFT_N", "\text{(precalculada)}"'] & H[k] \arrow[dr] & & \\ & & \times \arrow[r, "DFT_N^{-1}"] & x_i[n] \textcircled{N} h[n] \\ x_i[n] \arrow[r, "DFT_N"] & X_i[k] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Como la convolución circular se hace con un número de puntos $N=2L$ superior a la longitud de la convolución lineal, $2L-1$, no va a haber solapamiento en el tiempo y la convolución circular va a coincidir con la lineal entre 0 y $2L-1 = N-1$.

De hecho, incluso tomando $N=2L-1$ se evitaría el solapamiento en el tiempo.

El número de operaciones necesarias para realizar la convolución circular de este modo será la suma de:

- El número de operaciones para $x_i[n] \xrightarrow{DFT_N} X_i[k]$, que nos dicen que es:
  $2N\log_2 N = 4L\log_2(2L)$ multiplicaciones reales.
- El número de multiplicaciones reales para multiplicar $H[k]$ y $X_i[k]$. Teniendo en cuenta que ambos tienen longitud $N=2L$ y que ambos son complejas, el número de multiplicaciones reales necesarias es $4 \cdot N = 4 \cdot 2L = 8L$

  NOTA: Este número de operaciones se puede reducir explotando las propiedades de simetría de $X_i(k)$ y $H(k)$ por ser $x_i(n)$ y $h[n]$ reales, pero no lo tendremos en cuenta.

PROBLEMA 1 (6)

- El número de operaciones para $\underline{X}_i[k] \cdot H[k] \xrightarrow{DFT_N^{-1}} x_i[n] \circledN h[n]$ que nos dicen que es $2N\log_2 N = 4L\log_2(2L)$ multiplicaciones reales.

Con todo esto el número de operaciones reales necesarias para calcular la convolución circular (que coincide con la lineal) en el método de solapamiento y suma es:

$$4L\log_2(2L) + 8L + 4L\log_2(2L) = 8L(1+\log_2(2L))$$

$$= 8L(1+\log_2 2 + \log_2 L) = 8L(2+\log_2 L)$$

Particularizando para $L = 1024 \Rightarrow \log_2 L = 10$, el número de operaciones (multiplicaciones reales) necesarias es:

$$8 \cdot 1024\,(2+10) = 8 \cdot 1024 \cdot 12 = 98304.$$

En el caso de calcular la convolución lineal directamente necesitábamos L^2 multiplicaciones reales, lo que en el caso de $L=1024$ da un total de

$$L^2 = 1.048.576 \text{ multiplicaciones reales.}$$

En este caso el cálculo de la convolución con la DFT permite reducir el coste computacional a menos del 10% del requerido por el cálculo directo.