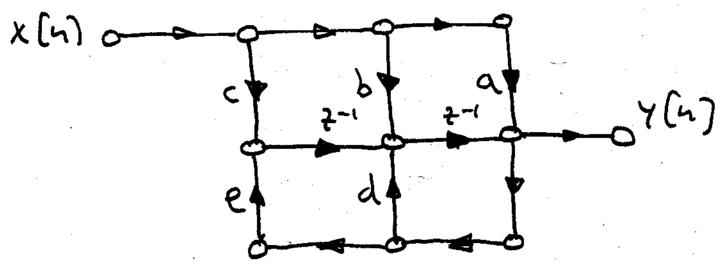
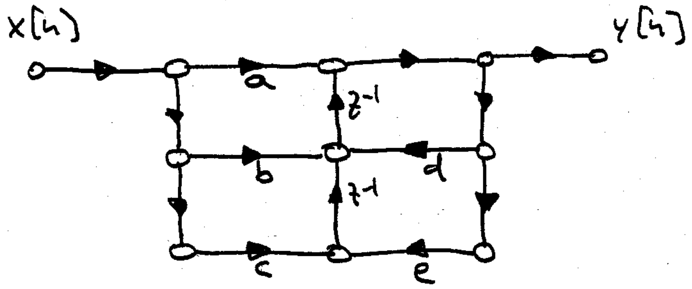
EXAMEN TDS SEPT 08 – PROBLEMAS

PROBLEMA 2 (1)

(a) Para determinar la función de transferencia del filtro primero lo podemos dibujar como un diagrama de flujo de señal



Transformando un poco el diagrama de flujo de señal ...



... nos resulta una estructura conocida. En particular es una Forma Directa II Traspuesta, y su función de transferencia es

$$H(z) = \frac{a + b z^{-1} + c z^{-2}}{1 - d z^{-1} - e z^{-2}}$$

PROBLEMA 2 (2)

b) Dibujar diagrama de polos y ceros y analizar estabilidad.

Antes de analizar cada caso en concreto conviene darse cuenta de que el sistema cumple las condiciones de reposo inicial, por lo que de las posibles ROC asociadas a la función de transferencia sólo será válida la que es compatible con el hecho de que el sistema es causal, la que va del último polo (el de mayor módulo) hasta ∞.

b.1) $$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{6}{4}z^{-1} + \frac{18}{16}z^{-2}} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - \frac{6}{4}z + \frac{18}{16}}$$

Factorizamos numerador y denominador

$$z^2 + 2z + 1 = (1+z)(1+z) \Rightarrow \text{CEROS}: z = -1 \quad (\text{doble})$$

$$z^2 - \frac{6}{4}z + \frac{18}{16} = 0 \Rightarrow z = \frac{\frac{6}{4} \pm \sqrt{\frac{36}{16} - \frac{4 \cdot 18}{16}}}{2} = \frac{\frac{6}{4} \pm \sqrt{\frac{36-72}{16}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{6}{4} \pm j\sqrt{\frac{36}{16}}}{2} = \frac{\frac{6}{4} \pm j\frac{6}{4}}{2} = \frac{3}{4} \pm j\frac{3}{4} \Leftarrow \text{POLOS}$$

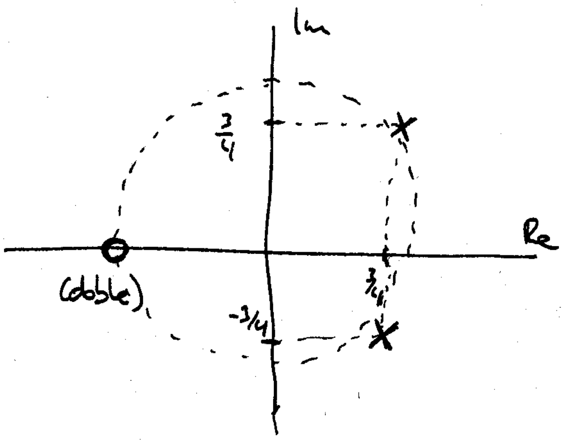
Como no queda muy claro si los polos están dentro o fuera de la circunferencia unidad lo comprobamos.

$$\left|\frac{3}{4} \pm j\frac{3}{4}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+9}{16}} = \sqrt{\frac{18}{16}} > 1$$

Están fuera, aunque por muy poco.

PROBLEMA 2 (3)

Ahora podemos dibujar el diagrama de polos y ceros



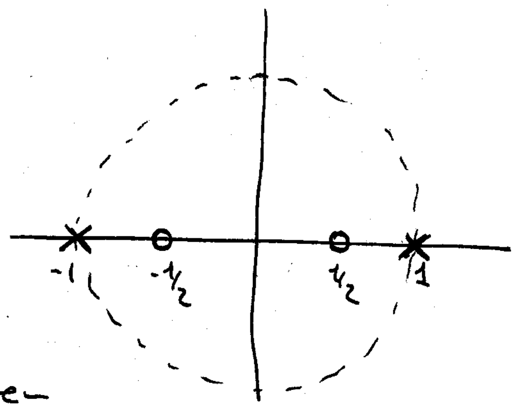
La ROC del sistema, por ser éste causal, es $|z| > \sqrt{\frac{18}{16}}$, que no incluye la circunferencia unidad, por lo que el sistema resultante NO ES ESTABLE.

b.2) $$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{z^2 - 1/4}{z^2 - 1} = \frac{(z+\frac{1}{2})(z-1/2)}{(z+1)(z-1)}$$

CEROS: $z = \pm 1/2$

POLOS: $z = \pm 1$

Diagrama de polos y ceros



Estabilidad: El sistema no es estable porque, al tener polos sobre la circunferencia unidad nunca la ROC va a poder incluir a dicha circunferencia.

PROBLEMA 2 (4)

c) En este caso la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}$$

Nos piden determinar la respuesta del sistema cuando la entrada es una sinusoidal $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$.

Podemos descomponer esta sinusoidal como suma de dos exponenciales complejas

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{\pi n}{3}} + e^{-j\frac{\pi n}{3}}\right]$$

Ahora, aplicando linealidad y la propiedad de las exponenciales complejas de ser autofunciones de los S.L.I. (como el que tenemos), siendo su autovalor $H(e^{jw})$, podemos escribir que la salida es:

$$y[n] = \frac{1}{2} H(e^{j\frac{\pi}{3}}) \cdot e^{j\frac{\pi}{3}n} + \frac{1}{2} H(e^{-j\frac{\pi}{3}}) e^{-j\frac{\pi}{3}n}$$

Para que esta expresión sea válida es necesario que la DTFT de $h[n]$ exista. Esto no lo hemos comprobado hasta ahora así que vamos a comprobarlo.

PROBLEMA 2 (5)

Para ello determinamos la ROC de $H(z)$.

$H(z)$ tiene 2 polos en $z = \pm\frac{1}{2}$. Como el sistema es causal, la ROC va hacia afuera de ellos, es decir

$$ROC: \ |z| > \frac{1}{2}$$

La ROC incluye a la circunferencia unidad, por lo que la DTFT se puede obtener a partir de la transformada Z sin más que particularizar $z = e^{j\omega}$. Esto nos asegura que la respuesta en frecuencia, $H(e^{j\omega})$, existe. Además obtenemos su expresión:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 - e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

Ahora tenemos que calcular $H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{\pi}{3}}$ y $H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\frac{\pi}{3}}$

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{\pi}{3}} = \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1 + e^{j\pi}e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1 + e^{+j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

PROBLEMA 2 (6)

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\frac{\pi}{3}} = \frac{1 - e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{j\frac{2\pi}{3}}}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{2\pi}{3}}}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

También deberíamos comprobar que el denominador es $\neq 0$, pero eso es fácil, ya que $\left|\frac{1}{4}e^{j\omega}\right| = \frac{1}{4}$, con lo cual no puede anular nunca el término 1, de módulo 1.

En definitiva, como $H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{\pi}{3}} = H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\frac{\pi}{3}} = 0$,

la salida es $\boxed{y[n]=0}$