Universidad Autónoma de Madrid Curso 2020-21

Matemáticas/ Ingeniería Informática-Matemáticas

Teoría de Galois

Primer examen parcial. Martes, 17 de noviembre de 2020

---

1. Problema 2A. Sea $K = \mathbb{Q}(i)$.

a) (0,25 puntos) Describe el cuerpo de descomposicin F de $x^4 - 12$ sobre K.

b) (0,25 puntos) Demuestra que $x^4 - 12$ es irreducible en $K[x]$.

c) (0,25 puntos) Calcula $[F : K]$.

d) (0,5 puntos) Describe los elementos de Gal(F/K). A qu grupo conocido es isomorfo?

e) (0,5 puntos) Sea $\varphi : K \to K$ el $\mathbb{Q}$-automorfismo con $\varphi(i) = -i$. Demuestra que $\varphi : K \to K$ se puede extender a un automorfismo de F. Es este automorfismo nico?

a) Raíces de x^4-12: $\sqrt[4]{12}\, e^{\frac{2\pi i k}{4}}$ $k=0,1,2,3$

$\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[4]{12}\, i$, $-\sqrt[4]{12}$, $-i\sqrt[4]{12}$

$F = \mathbb{Q}(i)(\pm\sqrt[4]{12}, \pm\sqrt[4]{12}\, i) = \mathbb{Q}(i)(\sqrt[4]{12}) =$

$= \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{12})$.

c) $[F : K] = ?$

$p_{i,\mathbb{Q}}(x) = x^2+1$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(i) \arrow[dr, "\leq 4"] & \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "4"'] & & \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{12}) \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{12}) \arrow[ur, "\leq 2"'] &
\end{tikzcd}$$

$p_{\sqrt[4]{12},\mathbb{Q}} = x^4-12$

(irred por Eisenstein con $p=3$)

Como $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{12}) \subseteq \mathbb{R}$, $\Rightarrow i \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{12}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})] = 2$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{12}) : \mathbb{Q}] = 8$

$$\Rightarrow 8 = [\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{12}):\mathbb{Q}(i)]\cdot[\mathbb{Q}(i):\mathbb{Q}] =$$

$$= [\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{12}):\mathbb{Q}(i)]\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{[\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{12}):\mathbb{Q}(i)] = 4}$$

b) ¿x^4-12 irred $/\mathbb{Q}(i)$?

Por c): $4 = [\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2}):\mathbb{Q}(i)] \overset{\checkmark}{=}$ por definición

$= \text{grado de } P_{\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}(i)}(x)$

Además

$$P_{\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}(i)}(x) \mid x^4-12$$

Como tienen el mismo grado $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}(i)}(x) = x^4-12$ y por ser el polinomio mínimo de un elemento algebraico $/\mathbb{Q}(i)$ debe ser irreducible sobre $\mathbb{Q}(i)$.

d)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{12}) \arrow[r] & \mathbb{Q}(i,\sqrt{2}) \\
\mathbb{Q}(i) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Todo $\varphi \in Gal(F/K)$ queda determinado por la imagen de $\sqrt[4]{12}$, imagen que por otro lado solo puede ser otra raíz de su polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}(i)$: $\pm\sqrt[4]{12}, \pm i\sqrt[4]{12}$.

Además, dadas dos raíces de x^4-12 siempre existe un automorfismo de F que lleva una a la otra.

Por lo tanto $|Gal(F/K)| = 4$:

$\varphi_1: \sqrt[4]{12} \to \sqrt[4]{12}$ (id); $\varphi_2: \sqrt[4]{12} \to -\sqrt[4]{12}$;

$\varphi_3: \sqrt[4]{12} \to i\sqrt[4]{12}$, $\varphi_4: \sqrt[4]{12} \to i\sqrt[4]{12}$.

$\Rightarrow Gal(F/K) \cong \begin{matrix} C_2\times C_2 \\ ó \\ C_4 \end{matrix}$. Como

$|\varphi_3| = |\varphi_4| = 4 \Rightarrow Gal(F/K) \simeq C_4$

e) Sea $\varphi: \mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i)$, $i \longmapsto -i$. El teorema general de extensión de automorfismos a cuerpos de descomposición dice que φ

Se puede extender siempre a un automor de F. Como $F = K(\sqrt[4]{12})$, se puede extender hasta de 4 maneras, tantas como el nº de raíces de $p_{\sqrt[4]{12},K}(x)$.