ETSISI
UPM

Apellidos: **Iniciales 1er apellido:**

Nombre:

Lógica y Matemática Discreta

14/1/2019

Tercer parcial

Instrucciones:

- En cada pregunta de test sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto; y de los ejercicios: sobre 3 puntos.
- Tiempo total del examen: **2 horas**.
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico a lo largo de todo el examen.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en Moodle.
- **Justificar todas las respuestas en los 4 ejercicios y los 2 problemas**.

TEST (20%)

La relación $R = \{(b,a), (c,b), (d,b), (d,c)\}$ sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ verifica que:

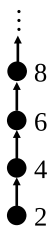
a) Es antisimétrica.

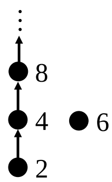
b) Es simétrica.

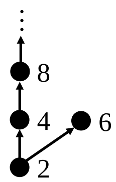
c) Es transitiva.

A

El diagrama de Hasse del conjunto $\{2^n \mid n \geq 1\} \cup \{6\}$ con de la relación de divisibilidad es:

a) 

b) 

c) 

C

El conjunto $\mathbb{Z}_7$ es igual a:

a) $\{\overline{-3}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{38}\}$

b) $\{\overline{-3}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{45}\}$

c) $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{-3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$

B

¿Cuál de las siguientes listas puede ser la secuencia de grados de un grafo de 5 vértices?

a) $[3, 3, 3, 2, 2]$.

b) $[5, 4, 3, 2, 2]$.

c) $[4, 3, 2, 2, 1]$.

C

Sea G un bosque con 20 vértices y 12 aristas. Entonces se verifica:

a) G puede tener más de 8 componentes conexas.

b) G tiene exactamente 8 componentes conexas.

c) G puede tener menos de 8 componentes conexas.

$\boxed{\textbf{B}}$

Se sabe que un grafo G tiene un único centro y una única mediana y que éstos son distintos. Entonces, la tabla de radios y sumas puede ser:

a)

	a	b	c	d
r	3	4	5	3
s	12	10	13	11

b)

	a	b	c	d
r	3	4	5	4
s	12	10	13	11

c)

	a	b	c	d
r	3	4	5	4
s	10	12	13	11

$\boxed{\textbf{B}}$

DEFINICIONES (10%)

1. Enunciar la propiedad antisimétrica de una relación R sobre un conjunto A.

La relación R sobre el conjunto A es antisimétrica si para todo $a, b \in A$ tales que $a\,R\,b$ y $b\,R\,a$ se verifica que $a = b$.

2. Enunciar la fórmula de Euler para grafos simples.

Dado un grafo simple $G = (V, A)$ con m aristas, la fórmula de Euler es la siguiente:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2m$$

EJERCICIOS (30%)

1. Sea la siguiente relación de equivalencia sobre el conjunto A de palabras de 4 bits:

$$a_1a_2a_3a_4 \, R \, b_1b_2b_3b_4 \quad \Longleftrightarrow \quad a_2 - a_3 = b_2 - b_3$$

a) Describir todas las clases de equivalencia de R y dar el cardinal de cada una de ellas.

b) Obtener el conjunto cociente A/R y su cardinal.

a) Cada una de las clases de equivalencia de R está asociada a un valor de $a_2 - a_3$ y, dado que a_2 y a_3 son bits, hay exactamente tres clases de equivalencia: las asociadas a los valores -1, 0 y 1.
Asociada a -1: $[0010] = \{\, 0010,\ 0011,\ 1010,\ 1011 \,\}$ con cardinal 4.
Asociada a 1: $[0100] = \{\, 0100,\ 0101,\ 1100,\ 1101 \,\}$ con cardinal 4.
Asociada a 0: $[0000] = \{\, 0000,\ 0001,\ 1000,\ 1001,\ 0110,\ 0111,\ 1110,\ 1111 \,\}$ con cardinal 8.

b) A la vista del apartado a) tenemos:

$$A/R = \{\, [0010],\ [0100],\ [0000] \,\} \qquad \text{y su cardinal} \qquad |A/R| = 3$$

2. En el conjunto de todos los grafos se define la relación binaria

$$G_1 \, R \, G_2 \quad \Longleftrightarrow \quad G_1 \text{ y } G_2 \text{ tienen el mismo número de vértices}$$

a) Decir razonadamente qué grafos de las familias P_n y K_n están relacionados con $K_{3,4}$.

b) Dar los menores valores de n y m para los que existen C_n y Q_m tales que $C_n R \, Q_m$.

a) El grafo bipartito completo $K_{3,4}$ tiene 7 vértices. Por tanto estará relacionado con el único camino de 7 vértices P_7 y con el único grafo completo de 7 vértices K_7:

$$P_7 \, R \, K_{3,4} \qquad \text{y} \qquad K_7 \, R \, K_{3,4}$$

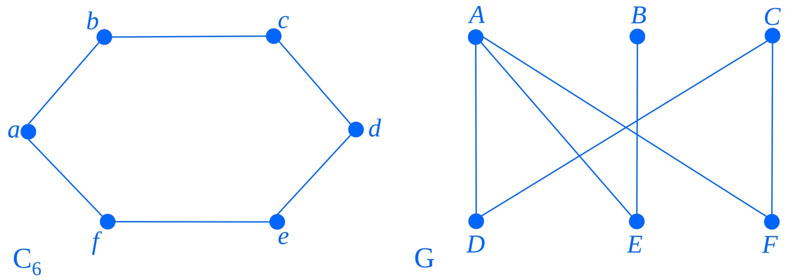
b) Para que $C_n R \, Q_m$ el número de vértices del ciclo C_n (n tal que $n \geq 3$) debe ser igual que el número de vértices de cubo Q_m (2^m con $m \geq 1$). Por tanto se debe cumplir la ecuación

$$n = 2^m \qquad \text{con} \qquad n \geq 3 \text{ y } m \geq 1$$

La solución con los valores más pequeños de n y m es: $n = 4$ y $m = 2$.

3. Construir dos grafos bipartitos de 6 vértices y 6 aristas que no sean isomorfos. Probar que los grafos dados cumplen lo que se exige.

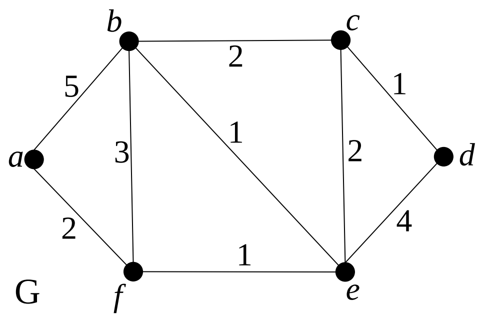
La solución a este problema no es única. Una de las posibles sería:



C_6 hemos estudiado que es bipartito. G también lo es porque los vértices se pueden separar en dos conjuntos $V_1 = \{A, B, C\}$ y $V_2 = \{D, E, F\}$ tales que en ninguno de ellos existen dos vértices adyacentes y cumplen $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

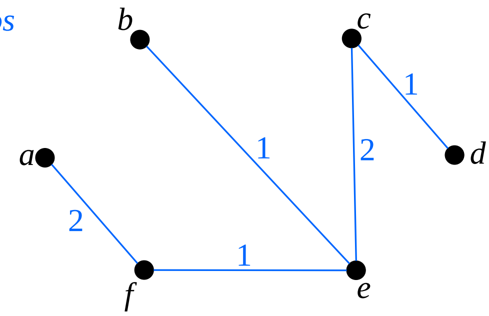
Además, $C_6 \not\approx G$ porque tienen distinta secuencia de grados: $Sec(C_6) = [2, 2, 2, 2, 2, 2]$ y $Sec(G) = [3, 2, 2, 2, 2, 1]$.

4. En el grafo ponderado G de la figura calcular las distancias del vértice a al resto de los vértices y el correspondiente árbol de caminos mínimos, usando el algoritmo de Dijkstra.



Aplicamos el algoritmo de Dijkstra desde el vértice a y, en cada paso, obtenemos la distancia de a a uno de los vértices del grafo y una arista del árbol de caminos mínimos.

	a	b	c	d	e	f	caminos
	-	5	$\propto$	$\propto$	$\propto$	***2***	*af*
		5	$\propto$	$\propto$	***3***		*afe*
		4	5	7			*afeb*
			5	7			*afec*
				6			*afecd*
d(a,v)	***0***	***4***	***5***	***6***	***3***	***2***	



El la última fila de la tabla están las distancias de a a cualquier vértice y en la figura de la derecha el árbol de caminos mínimos desde a.

Apellidos: Iniciales 1^{er} apellido:

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta 14/1/2019

Tercer parcial

PROBLEMA 1 (20%)

Se considera el conjunto $A = \{\, x_1x_2x_3x_4 \mid x_1, x_2 \in \{a,b,c,d\}$ y $x_3, x_4 \in \{0,1\}\,\}$ y la siguiente relación de orden R sobre A

$$x_1x_2x_3x_4 \, R \, y_1y_2y_3y_4 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1x_2 \leq_{LEX} y_1y_2,\ x_3 \leq y_3 \text{ y } x_4 \leq y_4$$

donde $\leq_{LEX}$ representa el orden del diccionario.

a) *(1 punto)* Probar que R es una relación de orden parcial.

b) *(2 puntos)* Probar que (A, R) tiene máximo y mínimo.

c) *(5 puntos)* Dado el conjunto $M = \{\, ab01,\ ba10,\ ba11,\ cb10,\ da11,\ db11 \,\}$, obtener el diagrama de Hasse de (M, R) y sus elementos notables.

d) *(2 puntos)* Añadir un elemento a M de modo que el nuevo conjunto tenga mínimo y sea distinto del mínimo de (A, R).

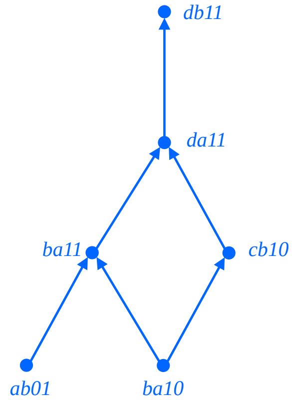
a) R es de orden parcial porque tiene elementos no comparables. Por ejemplo: $aa01 \not R\, aa10$ porque $1 = x_4 \not\leq y_4 = 0$ y $aa10 \not R\, aa01$ porque $1 = x_3 \not\leq y_3 = 0$.

b) En (A, R) se verifica que $aa00$ es el mínimo, porque para todo $y_1y_2y_3y_4 \in A$ se cumple que $aa00 \, R \, y_1y_2y_3y_4$, ya que $aa \leq_{LEX} y_1y_2$ para cualquier y_1y_2, $0 \leq y_3$ para cualquier y_3 y $0 \leq y_4$ para cualquier y_4.
También se verifica que $dd11$ es el máxino, porque para todo $x_1x_2x_3x_4 \in A$ se cumple que $x_1x_2x_3x_4 \, R \, dd11$, ya que $x_1x_2 \leq_{LEX} dd$ para cualquier x_1x_2, $x_3 \leq 1$ para cualquier x_3 y $x_4 \leq 1$ para cualquier x_4.

c) Estudiamos las relaciones que se dan entre los elementos de M:

$ab01$	es más pequeño que	$ba11$, $da11$ y $db11$
$ba10$	es más pequeño que	$ba11$, $cb10$, $da11$ y $db11$
$ba11$	es más pequeño que	$da11$ y $db11$
$cb10$	es más pequeño que	$da11$ y $db11$
$da11$	es más pequeño que	$db11$

De estas relaciones se obtiene el diagrama de Hasse de la figura



A la vista del diagrama de Hasse, los elemento notables de (M, R) son:

Minimales:	$ab01$ y $ba10$
Mínimo	no hay, por tener más de un minimal
Maximales:	$db11$
Máximo	$db11$, por ser el único maximal en un conjunto finito

d) Basta añadir un elemento menor que los minimales de M y distinto del mínimo de A ($aa00$). Por ejemplo $ab00$ cumple lo que se pide.

Apellidos: Iniciales 1^{er} apellido:

Nombre:

ETSISI
UPM

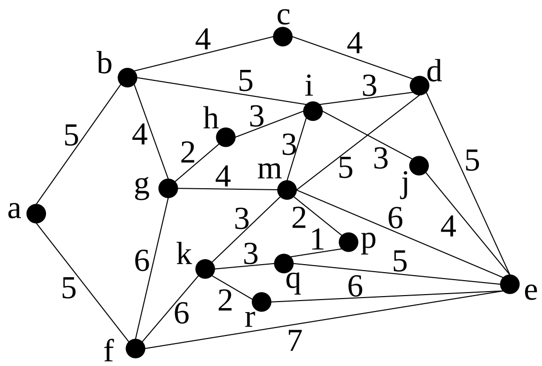
Lógica y Matemática Discreta

14/1/2019

Tercer parcial

PROBLEMA 2 (20%)

El grafo de la figura representa las poblaciones (vértices) y carreteras (aristas) de una Comarca y los pesos de las aristas indican las distancias en km entre las poblaciones correspondientes a sus vértices extremos.

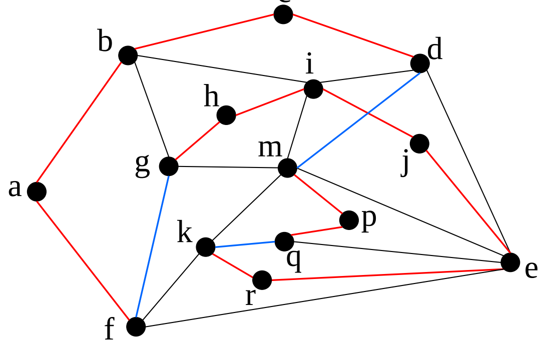


1. *(3 puntos)* El organizador de un rally quiere diseñar un circuito que pase por cada una de las carreteras exactamente una vez, ¿puede hacerlo? En caso afirmativo indicar cómo. En caso negativo indicar si existe un trazado para la carrera en el que la salida y la meta no coincidan y, de ser así, calcular uno.

   El circuito que se pide en este caso es un circuito euleriano. Como el grafo es conexo, para saber si existe dicho circuito, basta analizar los grados de los vértices. Se tiene que $g(i) = 5$, $g(q) = 3$ y el resto de los vértices tienen grado par. Entonces, el grafo no es euleriano y, por tanto, no existe el circuito que piden. Sin embargo, el grafo es semieuleriano y admite un recorrido con extremos en los vértices i y q, que se corresponde con el trazado de la carrera con salida y meta distintos. Usando el algoritmo de inserción de ciclos resulta:

Recorrido inicial:	$i, b, c, d, i, j, e, d, m, e, q, p, m, k, r, e, f, a, b, g, f, k, q$
Ciclo adicional:	i, h, g, m, i
Recorrido final:	$i, h, g, m, i, b, c, d, i, j, e, d, m, e, q, p, m, k, r, e, f, a, b, g, f, k, q$

2. *(3 puntos)* Si el organizador del rally quisiese diseñar un circuito que pasase por cada una de las poblaciones de la Comarca exactamente una vez, ¿podría hacerlo? En caso afirmativo dar un ejemplo de circuito que empiece en a.

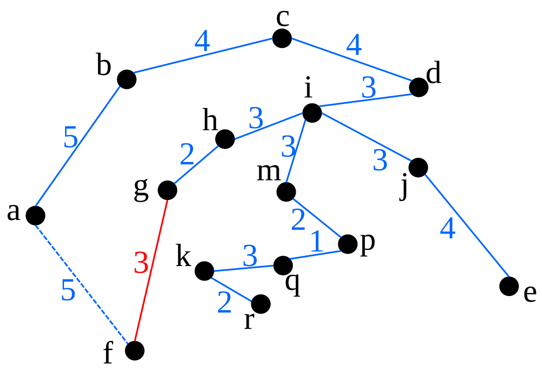


El circuito que se pide, si existe, se corresponde con un ciclo hamiltoniano en el grafo. Para comprobar si existe seleccionamos las aristas de los vértices de grado 2, que sabemos que deben pertener al ciclo hamiltoniano (son las que aparecen en el grafo anterior en color rojo). El subgrafo determinado por estas aristas no tiene ciclos ni vértices de grado mayor que 2, además incluye todos los vértices del grafo. Por tanto, para comprobar si existe el ciclo hamiltoniano basta ver si se pueden añadir aristas que unan todas las cadenas definidas por las aristas rojas en un ciclo. En este caso sí se puede hacer y las aristas añadidas están marcadas en color azul. El ciclo (circuito para la carrera) obtenido es el siguiente:

$$a, b, c, d, m, p, q, k, r, e, j, i, h, g, f, a$$

3. *(4 puntos)* En el presupuesto del próximo año se quiere incluir una partida para ensanchar algunas carreteras de la Comarca, de forma que se pueda ir de cualquier población a cualquier otra usando exclusivamente las nuevas vías.

   (i) Si el coste del ensanche es de 1 millón de euros por km, ¿cuál será el valor mínimo de la partida correspondiente del presupuesto?



   La solución óptima se obtiene ensanchando las carreteras correspodientes a un árbol recubridor de peso mínimo. Usando el algoritmo de Kruskal se obtiene el árbol anterior (aristas azules) que tiene peso $w(T) = 44$. Luego el valor de la partida presupuestaria debe ser 44 millones de euros.

   (ii) Resulta que el coste mínimo obtenido en *(i)* excede en 2 millones de euros el presupuesto disponible para esta partida. Entonces, con el objetivo de ajustarse al presupuesto, la empresa adjudicataria ofrece un precio especial de P millones de euros por el ensanche de la carretera *gf*. ¿Cuál será el mayor valor de P con el que se consigue ese objetivo?

   Para rebajar el coste del proyecto, ajustando únicamente el peso de la arista gf, hay que incluir esta arista en el árbol recubridor de peso mínimo. Para ello debe tener un peso menor o igual al de la arista de mayor peso del ciclo que se genera al añadirla al árbol anterior, o sea $w(gf) \leq 5$. Como además queremos reducir el peso del árbol en 2 milliones de euros, el peso $w(gf)$ deberá ser de 3 millones de euros (en el árbol se suprimiría una arista de peso 5 en dicho ciclo, por ejemplo af -arista en color azul punteada- y se añadiría gf con peso 3 -arista en color rojo-).