Algebra Lineal. Grupo B. 12/02/2013

Duración: 3 horas.

Todas las preguntas valen igual. Cuando uses enunciados o definiciones vistos en clase, explícalo clara y concisamente.

1. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales V, V' sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que f es inyectiva si y solo si el núcleo de f es nulo.

2. Demostrar que el producto vectorial es antisimétrico: i.e., para $v, w \in \mathbb{R}^3$ es $v \wedge w = -(w \wedge v)$.

3. Demostrar que derivar polinomios es una aplicación lineal

$$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \ p(x) \mapsto p'(x).$$

Dar un ejemplo de una forma lineal definida en $\mathbb{R}[x]$.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$, hallar una matriz regular Q tal que $QA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Sean u, v vectores unitarios en un espacio euclídeo de dimensión $n \geq 2$ que forman un ángulo de $\pi/3$. Calcular la norma de $2u + v$ y el ángulo que forman $-u$ y $2u + v$. Hacer una representación gráfica.

6. En el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios reales en una variable de grado menor o igual que dos, se considera el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

A partir de la base $B = \{1, 1+x, 1+x^2\}$, obtener una base ortonormal, mediante el método de Gram–Schmidt.

7. En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio U dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

¿Existe un subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $U \cap W = \{0\}$ y $U + W$ está dado por $x + y + z = 0$? En caso afirmativo, hallar todos los posibles W. Hacer una representación gráfica de U, W y de $\mathbb{R}^3/U$.

8. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ dada por

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= v_1 + iv_2 \\ f(u_1 + u_3) &= v_1 + iv_2 \\ f(u_2 + u_3) &= v_1 \end{aligned}$$

donde $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, $B' = \{v_1, v_2\}$ es base de $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{C}^2$ respectivamente. Hallar la matriz de f respecto de B y B'. Hallar bases del núcleo y de la imagen de f. ¿Es f suprayectiva?

9. Hallar todas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ tales que $\ker f = \operatorname{im} f$. [Indicación: ¿cómo es una matriz asociada a f respecto de una base dada?]