

# CÁLCULO NUMÉRICO I

Martes, 19/5/2015

Examen final

Curso 2014-2015

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**Hay que JUSTIFICAR todas las respuestas**

1) (1.5 puntos) Se considera la ecuación  $x = e^{-x}$ .

a) Demostrar que tiene una única solución  $\alpha$  y que  $0 < \alpha < 1$ .

b) Es fácil comprobar (es aconsejable hacer esa comprobación pero NO es necesario incluirla en la respuesta) que si  $w$  es una constante con  $w \neq 0, -1$  entonces esa ecuación equivale a  $x = f(x)$  donde  $f(x) = \frac{we^{-x} + x}{1 + w}$ . Hallar qué valor de  $w$  daría la convergencia más rápida posible hacia  $\alpha$  en la iteración  $x_{k+1} = f(x_k)$ ; ese valor de  $w$  se expresa en función de  $\alpha$ .

2) (2.25 puntos) Se considera la función  $f(x) = x^4 + x + 1$ .

a) Encontrar  $p_2(x)$ , el polinomio interpolador de  $f(x)$  en los puntos  $-1, 0, 1$ .

b) Usar la fórmula de estimación del error en interpolación para encontrar una constante  $C$  tal que  $|f(x) - p_2(x)| \leq C$  en  $[-1, 1]$ . ¿Es esa constante óptima?

c) Sea ahora  $f$  una función cualquiera en  $[-1, 1]$  con sus tres primeras derivadas continuas. Suponiendo que  $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$ , demostrar que

$$\max_{[-1,1]} |f| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}} \max_{[-1,1]} |f'''|.$$

3) (2.25 puntos) Para aproximar la integral  $\int_{-1}^1 f(x)dx$  de funciones con suficientes derivadas se considera la regla de cuadratura  $I(f) = af(0) + bf'(0) + cf''(0)$ .

a) Encontrar  $a, b, c$  para que sea exacta en polinomios cuadráticos.

b) ¿Hasta qué orden es exacta?

c) Suponiendo que  $f$  tiene tantas derivadas continuas como sea necesario, usar la fórmula de Taylor, con término de error, para encontrar una constante  $C_f$ , que depende de la función  $f$ , tal que  $|\int_{-1}^1 f(x)dx - I(f)| \leq C_f$ .

4) (1.5 puntos) Se considera la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  y el vector  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

a) Encontrar una descomposición QR de A.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**